浙江大学

博士学位论文

子流形的平均曲率流与微分球面定理

姓名：叶斐

申请学位级别：博士

专业：基础数学

指导教师：许洪伟

201106

摘 要

本文着重研究子流形的平均曲率流与微分球面定理. 主要内容包括曲率积分条件下一般黎曼流形中超曲面与高余维子流形平均曲率流的延拓性定理, 曲率积分拼挤(pinching)条件下欧氏空间中超曲面平均曲率流的收敛性定理, 欧氏空间中高余维平均曲率流在曲率积分拼挤条件下的收敛性定理, 欧氏空间中子流形的微分球面定理, 第k个Ricci曲率拼挤条件下黎曼子流形的微分球面定理.

本文第二章研究了曲率积分条件下超曲面平均曲率流的可延拓性问题. 1978年, K. Brakke[5]首先从几何测度论的角度研究了平均曲率流. 八十年代, G. Huisken[33, 34, 35]系统研究了欧氏空间、球面和一般黎曼流形中超曲面的平均曲率流. Huisken[33]证明: 若欧氏空间中超曲面的第二基本形式关于时间一致有界, 则平均曲率流可以延拓. N. Šešum[51]运用爆破(blow up)的方法研究了Ricci流的可延拓性问题, 证明: 若黎曼流形的Ricci曲率关于时间一致有界, 则Ricci流可以延拓. 最近, B. Wang[68]给出了曲率积分条件下Ricci流的延拓性定理. 我们研究了曲率积分条件下超曲面平均曲率流的延拓性问题, 证明: 若平均曲率关于时空的积分有限, 且第二基本量有下界或初始超曲面的平均曲率有正下界, 则平均曲率流关于时间可以延拓. 这一结果将Huisken[33]的欧氏空间中超曲面平均曲率流可延拓的逐点拼挤条件拓广为黎曼流形中超曲面平均曲率流可延拓的整体拼挤条件.

第三章研究了一般黎曼流形中高余维子流形平均曲率流的可延拓性问题. 高余维的平均曲率流是平均曲率流研究中极为困难的情形, 目前关于高余维平均曲率流的研究结果较少. M. T. Wang, K. Smoczyk, J. Y. Li, J. Y. Chen, Y. L. Xin, B. Andrews和C. Baker等人分别研究了几类高余维的平均曲率流[2, 16, 63, 65, 70, 71, 72, 73, 80]. 本章将曲率积分条件下超曲面平均曲率流的可延拓性问题拓广为一般黎曼流形中高余维平均曲率流的情形, 我们证明: 如果平均曲率在时空上的积分有限, 且子流形的第二基本形式模长与平均曲率满

足一定的关系式, 那么黎曼流形中高余维平均曲率流的解关于时间可以延拓.

第四章证明了曲率积分拼挤条件下欧氏空间中超曲面平均曲率流的收敛性定理. 上世纪八十年代, Huisken[33]获得了关于平均曲率流收敛性的著名定理: 若欧氏空间$\mathbb{R}^{n+1}$中平均曲率流的初始超曲面是凸的, 则平均曲率流在有限时间内收敛到一个圆点. 应用第二章给出的平均曲率流的延拓性定理, 我们将逐点拼挤条件下超曲面平均曲率流的Huisken收敛性定理推广为欧氏空间中超曲面平均曲率流在曲率积分拼挤条件下的收敛性定理, 证明: 如果平均曲率流初始超曲面的无迹第二基本形式的L^p范数满足某一拼挤条件, 那么平均曲率流在有限时间内收敛到一个圆点.

第五章研究了欧氏空间中高余维平均曲率流在曲率积分拼挤条件下的收敛性问题. M. T. Wang[71]证明了图子流形平均曲率流的收敛性定理. K. Smoczyk[63]证明了Lagrange子流形平均曲率流长时间解的存在性. 最近, B. Andrews和C. Baker[2]证明了逐点拼挤条件下欧氏空间中高余维平均曲率流的收敛性定理. 作为第四章工作的进一步深入, 本章将Andrews和Baker的结果推广为整体积分拼挤条件下的收敛性定理. 对于欧氏空间中的高余维平均曲率流, 我们证明: 如果初始子流形的无迹第二基本形式的L^p范数满足一定的拼挤条件, 那么平均曲率流在有限时间内收敛到一个圆点. 根据这一结果, 我们得到了欧氏空间中紧致子流形在曲率积分拼挤条件下的微分球面定理.

第六章研究了黎曼子流形的微分球面定理. 球面定理是曲率与拓扑研究领域的重要研究方向之一. 二十世纪五十年代以来, 许多著名的几何学家在这一领域做出了卓越的贡献[4, 8, 11, 56, 85, 92, 96]. 最近, H. W. Xu, J. R. Gu和E. T. Zhao[85, 92]证明了第二基本形式拼挤条件下完备子流形的若干微分球面定理. 运用曲率估计、稳定流消没定理和Ricci流收敛性定理, 我们证明第k个Ricci曲率拼挤条件下黎曼子流形的若干微分球面定理.

关键词: 子流形; 黎曼流形; 延拓性定理; 收敛性定理; 微分球面定理; 平均曲率流; Ricci流; 平均曲率; 第k个Ricci曲率; 稳定流; 同调群; 基本群; 第二基本形式; 无迹第二基本形式; 曲率积分拼挤; Moser迭代.

Abstract

In this thesis, we mainly study the mean curvature flow and differentiable sphere theorems of submanifolds. We obtain the extension theorems for the mean curvature flow of hypersurfaces and submanifolds under integral curvature conditions, convergence theorems for the mean curvature flow of hypersurfaces under integral curvature pinching conditions, convergence theorems for the mean curvature flow of higher codimension in Euclidean space under integral curvature pinching conditions, the differentiable sphere theorems for submanifolds in Euclidean space, the differentiable sphere theorems for compact submanifolds of positive k-th Ricci curvature.

In Chapter 2, we investigate the extension for the mean curvature flow of hypersurfaces under integral curvature conditions. In 1978, K. Brakke[5] studied mean curvature flow from the view point of geometric measure theory firstly. In 1980's, G. Huisken[33, 34, 35] investigated the mean curvature flows of hypersurfaces in Euclidean space, sphere and general Riemannian manifold, respectively. Huisken[33] proved that if the second fundamental form of the hypersurface in Euclidean space is uniformly bounded, then the mean curvature flow can be extended over time. By a blow up argument, N. Šešum[51] studied the extension problem of Ricci flow, and proved that the Ricci flow can be extended over time under the condition that the Ricci curvature of the Riemannian manifold is uniformly bounded. Recently, B. Wang[68] proved the extension theorem for Ricci flow under some integral conditions. We investigate the integral curvature pinching conditions to extend the mean curvature flow of hypersurfaces, and prove that if the space-time integration of the mean curvature is finite, and either the second fundamental form is bounded from below or the initial mean curvature has a positive lower bound, then the mean curvature flow can be extended over time. This result generalizes the pointwise condition of Huisken[33] to integral curvature pinching condition.

In Chapter 3, we study the extension problem for mean curvature flow of

submanifolds in a general Riemannian manifold. The mean curvature flow in higher codimension is the most difficult situation. At present, relatively little is known about the mean curvature flow with higher codimension. M. T. Wang, K. Smoczyk, J. Y. Li, J. Y. Chen, Y. L. Xin, B. Andrews and C. Baker investigated several kinds of mean curvature flow with higher codimension, respectively[2, 16, 63, 65, 70, 71, 72, 73, 80]. We generalize the extension theorem for mean curvature flow under integral pinching condition to the case of mean curvature flow of submanifolds with higher codimension in a general Riemannian manifold, and prove that if the space-time integration of the mean curvature is finite, and the second fundamental form and the mean curvature satisfy some relation, then the mean curvature flow can be extended over time.

In Chapter 4, we prove the convergence theorems for mean curvature flow of hypersurfaces in Euclidean space. In 1984, Huisken[33] obtained the famous result on the convergence of the mean curvature flow: if the initial hypersurface in Euclidean space $\mathbb{R}^{n+1}$ is uniformly convex, then the mean curvature flow converges to a round point in a finite time. Applying our work on the extension of the mean curvature flow in hypersurfaces in Chapter 2, we investigate the convergence of mean curvature flow under integral curvature pinching conditions, which generalizes the pointwise condition of Huisken. We prove that if the L^p norm of the tracefree second fundamental form of the initial hypersurface is sufficiently pinched, then the mean curvature flow converges to a round point in a finite time.

In Chapter 5, we investigate the convergence of the mean curvature flow with higher codimension in Euclidean space. M. T. Wang[71] obtained the convergence theorem for the mean curvature flow of graphic submanidolds. K. Smoczyk[63] proved the long time existence of the Lagrangian mean curvature flow. Recently, B. Andrews and C. Baker[2] obtained the convergence theorem for submanifolds in Euclidean space under pointwise pinching condition. As an extension of our work in Chapter 4, we generalize this result to the convergence theorem under integral curvature pinching conditions. We prove that if the L^p norm of the tracefree second fundamental form of the initial submanifold is sufficiently pinched, then the mean curvature flow converges to a round point in finite time. Using this

theorem, we obtain the differentiable sphere theorems for compact submanifolds in Euclidean space under the integral curvature pinching conditions.

In Chapter 6, we prove the differentiable sphere theorems for compact submanifolds. The investigation of curvature and topology of Riemannian manifolds or submanifolds is an important steam of global differential geometry. From 1950's, many famous geometers obtained a lot of important results[4, 8, 11, 56, 85, 92, 96]. Recently, H. W. Xu, J. R. Gu and E. T. Zhao[85, 92] proved the differentiable sphere theorems for complete submanifolds under the pinching conditions of the second fundamental form of the submanifolds. With the estimate of the curvatures, the non-existence theorem for stable currents, and the convergence theorem of Ricci flow, we obtain some new differentiable sphere theorems under the conditions of the k-th Ricci curvature.

Keywords: Submanifolds, Riemannian manifolds, extension theorem, convergence theorem, differentiable sphere theorem, mean curvature flow, Ricci flow, mean curvature, k-th Ricci curvature, stable currents, homology group, fundamental group, the second fundamental form, the tracefree second fundamental form, integral curvature pinching, Moser iteration.

第一章 前言

本文着重研究子流形的平均曲率流与微分球面定理, 主要内容包括黎曼流形中超曲面与高余维子流形的平均曲率流在曲率积分条件下的延拓性定理, 曲率积分拼挤(pinching)条件下欧氏空间中超曲面平均曲率流的收敛性定理, 欧氏空间中高余维平均曲率流在曲率积分拼挤条件下的收敛性定理, 欧氏空间中子流形的微分球面定理, 第k个Ricci曲率拼挤条件下黎曼子流形的微分球面定理. 全文共分为五个部分(第二章至第六章).

本文第二章研究了曲率积分条件下超曲面平均曲率流解的可延拓性问题. 二十世纪七十年代, K. Brakke[5]首先从几何测度论的角度研究了平均曲率流的性质. 1984年至1987年, G. Huisken[33, 34, 35]系统研究了欧氏空间、球面和一般黎曼流形中紧致超曲面上的平均曲率流. Huisken[33]证明了关于平均曲率流收敛性的著名结果: 如果欧氏空间中平均曲率流的初始超曲面是凸的, 那么该平均曲率流在有限时间内收敛到一个圆点. Huisken同时证明了逐点拼挤条件下欧氏空间中超曲面的平均曲率流的延拓性定理.

定理A.[33] *设$0 < T < \infty$. 如果欧氏空间中紧致超曲面的平均曲率流的第二基本形式关于时间一致有界, 即存在与时间无关的常数C, 使得在时间区间$[0,T)$上有*

$$\max_{M_t} |A| \le C,$$

那么该平均曲率流的解可以延拓到时间T之后.

N. Šešum[51] 运用爆破(blow up)的方法研究了Ricci流解的可延拓性问题, 证明: 若黎曼流形的Ricci曲率关于时间一致有界, 则Ricci流的解关于时间可以延拓. 最近, B. Wang[68] 给出了在曲率积分条件下Ricci流的解关于时间的可延拓性定理.

定理B.[68] *设$(M^n, g(t))$是Ricci流在时间区间$[0,T)$上的解, 其中$T < \infty$. 如果*

(1)存在正常数C, 使得对所有$(x,t)\in M\times[0,T)$, 有$Ric(x,t)\geq -C$,
(2)$\|R\|_{\alpha,M\times[0,T)}=\left(\int_0^T\int_M|R|^\alpha d\mu dt\right)^{\frac{1}{\alpha}}<\infty$, 其中$\alpha$为满足$\alpha\geq\frac{n+2}{2}$的某个常数,
那么Ricci流的解可以延拓到时间T之后.

受其启发, 我们研究了曲率积分条件下黎曼流形中紧致超曲面的平均曲率流解的可延拓性问题, 获得如下的结果.

定理1. *设N^{n+1}为具有有界几何性质的$n+1$维黎曼流形, F_t: $M^n\longrightarrow N^{n+1}$为闭超曲面$M$上的平均曲率流在时间区间$[0,T)$上的解, 其中$T<\infty$. 如果*
(1)存在正常数C, 使得对所有$(x,t)\in M\times[0,T)$, 有$h_{ij}\geq -C$,
(2)$\|H\|_{\alpha,M\times[0,T)}=\left(\int_0^T\int_{M_t}|H|^\alpha d\mu_t dt\right)^{\frac{1}{\alpha}}<\infty$, 其中$\alpha$为满足$\alpha\geq n+2$的某个常数,
那么该平均曲率流的解可以延拓到时间T之后.

定理2. *设N^{n+1}为具有有界几何性质的$n+1$维黎曼流形, N^{n+1}的截面曲率K_N满足$-K_1\leq K_N\leq K_2$, 其中K_1和K_2是非负常数. 设F_t: $M^n\longrightarrow N^{n+1}$为闭超曲面$M$上的平均曲率流在时间区间$[0,T)$上的解, 其中$T<\infty$. 如果*
(1)当$t=0$时, $H^2>n^2K_1$,
(2)$\|H\|_{\alpha,M\times[0,T)}=\left(\int_0^T\int_{M_t}|H|^\alpha d\mu_t dt\right)^{\frac{1}{\alpha}}<\infty$, 其中$\alpha$为满足$\alpha\geq n+2$的某个常数,
那么该平均曲率流的解可以延拓到时间T之后.

这里流形N具有有界几何性质是指: (i)N的截面曲率有界; (ii)N的单射半径具有正的下界.

在第三章中, 我们将曲率积分条件下超曲面平均曲率流解的可延拓性定理推广为一般黎曼流形中高余维平均曲率流解的可延拓性定理. 高余维的平均曲率流是平均曲率流研究课题中极为困难的情形. 目前关于平均曲率流的研究主要集中在超曲面的情形, 即余维数为1的平均曲率流. 对一般余维数的平均曲率流, 目前的研究结果较少. M. T. Wang, K. Smoczyk, J. Y. Li, J. Y. Chen, Y. L.

Xin, B. Andrews和C. Baker等人先后研究了四维Einstein流形中曲面的平均曲率流，图子流形的平均曲率流，Lagrange子流形的平均曲率流和欧氏空间中的高余维平均曲率流[2, 16, 63, 65, 70, 71, 72, 73, 80]. 我们研究了曲率积分条件下黎曼流形中高余维子流形的平均曲率流解的可延拓性，得到了如下的结果.

定理3. *设N^{n+p}为具有有界几何性质的$n+p$维黎曼流形，$F_t: M^n \longrightarrow N^{n+p}$为闭子流形$M$上的平均曲率流在时间区间$[0,T)$上的解，其中$T<\infty$. 如果*
(1)存在正常数a和b，使得在$M_t, t\in[0,T)$上满足$|A|^2 \le a|H|^2+b$,
(2)$\|H\|_{\alpha,M\times[0,T)} = \left(\int_0^T\int_{M_t}|H|^\alpha d\mu_t dt\right)^{\frac{1}{\alpha}} < \infty$，其中$\alpha$为满足$\alpha \ge n+2$的某个常数，
那么该平均曲率流的解可以延拓到时间T之后.

本文第四章研究了曲率积分拼挤条件下欧氏空间中超曲面的平均曲率流的收敛性定理. 上世纪八十年代，Huisken[33]获得了关于平均曲率流收敛性的著名定理.

定理C.[33] *设M_0为欧氏空间$\mathbb{R}^{n+1}$中一致凸的$n(\ge 2)$维紧致超曲面，即M_0的第二基本形式在每一点都是严格正的. 则以M_0为初始曲面的平均曲率流在有限时间$0\le t<T<\infty$上具有光滑解，并且当$t\to T$时，$M_t=F_t(M)$收敛到一个圆点.*

Huisken的平均曲率流收敛性定理是在逐点拼挤条件下获得的. 我们首先将Huisken的收敛性定理拓广为曲率积分拼挤条件下超曲面平均曲率流的收敛性定理. 设$\mathring{A}$为平均曲率流超曲面的无迹第二基本形式，我们得到了如下结果.

定理4. *设$F_0: M^n\to\mathbb{R}^{n+1}(n\ge 3)$为光滑闭超曲面，且在$M_0=F_0(M)$上处处满足$H\neq 0$. 则对于某一固定的实数$p(>1)$，存在可用$n$, p, $\min_{M_0}|H|$和$\|A\|_{n+2}$显式表示的正常数C_1，使得如果*

$$\|\mathring{A}\|_p < C_1,$$

那么以F_0为初始超曲面的平均曲率流在有限的最大时间区间$[0,T)$上存在

唯一的光滑解$F: M^n \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$. 当$t \to T$时, F_t一致收敛到点$x \in \mathbb{R}^{n+1}$, 并且正规化的映射$\widetilde{F}_t = \frac{F_t - x}{\sqrt{2n(T-t)}}$在$C^\infty$意义下收敛到极限嵌入$\widetilde{F}_T$, 使得$\widetilde{F}_T(M)$为$\mathbb{R}^{n+1}$中的$n$维标准球面.

定理5. 设$F_0: M^n \to \mathbb{R}^{n+1} (n \geq 3)$为光滑闭超曲面, 且在$M_0 = F_0(M)$上处处满足$H \neq 0$. 则对于某一固定的实数$p(> n)$, 存在可用$n$, p, $\min_{M_0}|H|$和$||H||_{n+2}$显式表示的正常数C_2, 使得如果

$$||\mathring{A}||_p < C_2,$$

那么以F_0为初始超曲面的平均曲率流在有限的最大时间区间$[0,T)$上存在唯一的光滑解$F: M^n \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$. 当$t \to T$时, F_t一致收敛到点$x \in \mathbb{R}^{n+1}$, 并且正规化的映射$\widetilde{F}_t = \frac{F_t - x}{\sqrt{2n(T-t)}}$在$C^\infty$意义下收敛到极限嵌入$\widetilde{F}_T$, 使得$\widetilde{F}_T(M)$为$\mathbb{R}^{n+1}$中的$n$维标准球面.

在本文第五章中, 我们研究了欧氏空间中高余维平均曲率流在曲率积分拼挤条件下的收敛性问题. 由于目前对平均曲率流的研究大多集中于超曲面的情形, 关于高余维平均曲率流的研究结果较少. 最近, B. Andrews和C. Baker[2]证明了逐点拼挤条件下欧氏空间中高余维的平均曲率流的收敛性定理.

定理D.[2] 设$M_0 = F_0(M^n)$为$\mathbb{R}^{n+d}$中的$n(\geq 2)$维紧致光滑子流形. 若在M_0上处处满足$H \neq 0$, 并且$|A|^2 \leq c|H|^2$, 这里常数

$$c \leq \begin{cases} \frac{4}{3n}, & 2 \leq n \leq 4, \\ \frac{1}{n-1}, & n \geq 4, \end{cases}$$

则以M_0为初始流形的平均曲率流在有限的最大时间区间$[0,T)$上存在唯一的光滑解$F_t: M^n \to \mathbb{R}^{n+d}$. 当$t \to T$时, $F_t(\cdot)$一致收敛到点$x \in \mathbb{R}^{n+d}$, 并且正规化的平均曲率流收敛到$\mathbb{R}^{n+d}$中的n维标准球面.

我们在研究整体拼挤条件的基础上, 证明了曲率积分拼挤条件下欧氏空间中高余维平均曲率流的收敛性定理.

定理6. 设$F_0: M^n \to \mathbb{R}^{n+d}(n \geq 3)$为$\mathbb{R}^{n+d}$中的光滑闭子流形. 则对于某一固定的实数$p(>1)$, 存在依赖于$n, p, Vol(M_0)$和$||A||_{n+2}$的正常数$C_3$, 使得如果

$$||\mathring{A}||_p < C_3,$$

那么以F_0为初始子流形的平均曲率流在有限的最大时间区间$[0,T)$上存在唯一的光滑解$F: M^n \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+d}$. 当$t \to T$时, F_t一致收敛到点$x \in \mathbb{R}^{n+d}$, 并且正规化的映射$\widetilde{F}_t = \frac{F_t - x}{\sqrt{2n(T-t)}}$在$C^\infty$意义下收敛到极限嵌入$\widetilde{F}_T$, 使得$\widetilde{F}_T(M)$为$\mathbb{R}^{n+d}$中的$n$维标准球面.

定理7. 设$F_0: M^n \to \mathbb{R}^{n+d}(n \geq 3)$为$\mathbb{R}^{n+d}$中的光滑闭子流形. 则对于某一固定的实数$p(>n)$, 存在依赖于$n, p, Vol(M_0)$和$||H||_{n+2}$的正常数$C_4$, 使得如果

$$||\mathring{A}||_p < C_4,$$

那么以F_0为初始子流形的平均曲率流在有限的最大时间区间$[0,T)$上存在唯一的光滑解$F: M^n \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+d}$. 当$t \to T$时, F_t一致收敛到点$x \in \mathbb{R}^{n+d}$, 并且正规化的映射$\widetilde{F}_t = \frac{F_t - x}{\sqrt{2n(T-t)}}$在$C^\infty$意义下收敛到极限嵌入$\widetilde{F}_T$, 使得$\widetilde{F}_T(M)$为$\mathbb{R}^{n+d}$中的$n$维标准球面.

特别地, 我们得到如下的微分球面定理.

定理8. 设$F_0: M^n \to \mathbb{R}^{n+d}(n \geq 3)$为$\mathbb{R}^{n+d}$中的光滑闭子流形. 则对于某一固定的实数$p(>n)$, 存在依赖于$n, p, Vol(M_0)$和$||H||_{n+2}$的正常数$C_5$, 使得如果

$$||\mathring{A}||_p < C_5,$$

那么M微分同胚于n维标准球面.

定理9. 设$F_0: M^n \to \mathbb{R}^{n+d}(n \geq 3)$为$\mathbb{R}^{n+d}$中的光滑闭子流形, 并且在$M_0 = F_0(M)$上处处满足$H \neq 0$. 则对于某一固定的实数$p(>n)$, 存在依赖于$n$, p, $||H||_{n+2}$和$\min_{M_0}|H|$的正常数C_6, 使得如果

$$||\mathring{A}||_p < C_6,$$

那么M微分同胚于n维标准球面.

本文第六章研究了第k个Ricci曲率拼挤条件下黎曼子流形的微分球面定理. 球面定理是曲率与拓扑研究领域的重要研究方向之一. 在上世纪五十年代, H. E. Rauch首先提出了1/4拼挤条件下的拓扑球面问题. 半个多世纪以来, 许多著名的数学家在这一领域做出了卓越的贡献. 六十年代, M. Berger[3]和W. Klingenberg[38]对1/4拼挤流形证明了著名的拓扑球面定理. 1982年, R. Hamilton[27]首次运用Ricci流研究了Poincaré 猜想, 他证明: 任一具有正Ricci曲率的三维紧致黎曼流形微分同胚于S^n. 近三十年来, 几何流的发展为球面定理的研究提供了新的有力工具. 最近, S. Brendle和R. Schoen[8]运用Ricci流将Berger和Klingenberg的结果改进为微分球面定理.

二十世纪七十年代, S. T. Yau[95]和T. Itoh[37]证明了截曲率拼挤条件下球面中极小子流形的刚性定理.

定理E.[95, 37] 设M^n为球面$S^{n+p}(1)$中的n维可定向紧致子流形. 若M的截面曲率满足

$$K_M \geq \min\left\{\frac{p-1}{2p-1}, \frac{n}{2(n+1)}\right\},$$

则M必为全测地子流形, 两个球面的乘积流形, 和*Veronese*子流形之一.

最近, H. W. Xu和J. R. Gu[26]证明了下述结果.

定理F.[26] 设M^n为球面$S^{n+p}(1)$中的n维可定向紧致子流形. 若M的截面曲率满足

$$K_M \geq \frac{sgn(p-1)p}{2(p+1)},$$

则M必为全测地子流形, 两个球面的乘积流形, 和$S^4(1)$中的*Veronese*曲面之一.

运用子流形上稳定流消没定理和S. Smale[62]证明的$n(\geq 5)$维广义Poincaré猜想, H. Lawson和J. Simons[39]证明了球面中紧致子流形的拓扑球面定理. K. Shiohama和H. W. Xu[58]改进并推广了H. Lawson和J. Simons的结果, 得到了非负常曲率空间形式中完备子流形的最佳拓扑球面定理. 运用Ricci流的相关理论,

H. W. Xu和E. T. Zhao[92]证明了如下的子流形的微分球面定理.

定理G.[92] 设M^n为逐点$\delta(>1/4)$拼挤的$n+p$维黎曼流形N^{n+p}中的$n(\geq 4)$维可定向的紧致子流形. 令$\overline{K}_{\max}(x) := \max_{\pi\subset T_xN}\overline{K}(x,\pi)$, 这里$\overline{K}(x,\pi)$是流形$N$在点$x\in N$处的关于切平面$\pi(\subset T_xN)$的截面曲率. 如果对任意的$x\in M$有

$$S(x) < \frac{8\sqrt{2}}{3}\overline{K}_{\max}(x)(\delta - \frac{1}{4}),$$

那么M微分同胚于一个球面空间形式. 特别地, 如果M是单连通的, 那么M微分同胚于n维标准球面$\mathbb{S}^n$.

H. W. Xu和J. R. Gu[85]在数量曲率拼挤条件下证明了非负常曲率空间形式中完备子流形的最佳微分球面定理.

定理H.[85] 设M^n为$n+p$维非负常曲率空间形式N^{n+p}中的n维可定向完备子流形. 如果

$$\lambda(M) := \sup_M\left(S - \frac{n^2}{n-1}H^2 - 2c\right) < 0,$$

那么M微分同胚于标准球面$\mathbb{S}^n$.

运用曲率估计、稳定流消没定理和Ricci流收敛性定理, 我们证明了第k个Ricci曲率拼挤条件下黎曼子流形的微分球面定理.

定理10. 设M^n为黎曼流形N^{n+p}中的$n(\geq 4)$维紧致子流形, $\overline{K}(x,\pi)$为N在点$x\in N$处关于切平面$\pi(\subseteq T_xN)$的截面曲率. 令$\overline{K}_{\max}(x) := \max_{\pi\subseteq T_xN}\overline{K}(x,\pi)$, $\overline{K}_{\min}(x) := \min_{\pi\subseteq T_xN}\overline{K}(x,\pi)$. 如果$M$的第$k$个*Ricci*曲率满足

$$Ric_{(k)} > k[C_1(n)\overline{K}_{\max} - C_2(n)\overline{K}_{\min} + C_3(n)H^2],$$

其中常数$C_1(n) = \frac{n^2+5n-\frac{52}{3}}{n^2+5n-12}$, $C_2(n) = \frac{8}{3(n^2+5n-12)}$, $C_3(n) = \frac{(3n-5)n^2}{2(n-1)(n^2+5n-12)}$, k为某个小于$n-1$的正整数, 那么M微分同胚于一个球面空间形式. 特别地, 若M是单连通的, 则M微分同胚于n维标准球面$\mathbb{S}^n$.

特别地,对于外围空间为非负常曲率空间形式$\mathbb{F}^{n+p}(c)$的情形,我们获得了

定理11. *设M^n为具有非负常曲率c的空间形式$\mathbb{F}^{n+p}(c)$中的$n(\geq 4)$维紧致子流形. 如果M的第k个Ricci曲率满足*

$$Ric_{(k)} > k[C_4(n)c + C_5(n)H^2],$$

其中k为某个小于$n-1$的正整数, 常数$C_4(n) = \frac{n^2+5n-20}{n^2+5n-12}$, $C_5(n) = \frac{(3n-5)n^2}{2(n-1)(n^2+5n-12)}$, 那么$M$微分同胚于标准球面$\mathbb{S}^n$.

对于$k=2$的情形, 我们在外围流形为一般黎曼流形N^{n+p}和非负常曲率空间形式$\mathbb{F}^{n+p}(c)$ 的情况下分别获得如下的第2个Ricci曲率拼挤条件下的微分球面定理.

定理12. *设M^n为黎曼流形N^{n+p}中的$n(\geq 4)$维紧致子流形, $\overline{K}(x,\pi)$为N在点$x \in N$处关于切平面$\pi(\subseteq T_xN)$的截面曲率. 令$\overline{K}_{\max}(x) := \max_{\pi\subseteq T_xN}\overline{K}(x,\pi)$, $\overline{K}_{\min}(x) := \min_{\pi\subseteq T_xN}\overline{K}(x,\pi)$. 如果$M$的第2个Ricci曲率$Ric_{(2)}$满足*

$$Ric_{(2)} > \left(2 - \frac{8}{3n}\right)\overline{K}_{\max} - \frac{4}{3n}\overline{K}_{\min} + \frac{n}{4}H^2,$$

那么M微分同胚于一个球面空间形式. 特别地, 若M是单连通的, 则M微分同胚于n维标准球面$\mathbb{S}^n$.

定理13. *设M^n为具有非负常曲率c的空间形式$\mathbb{F}^{n+p}(c)$中的$n(\geq 4)$维可定向紧致子流形.*

(1)如果M的第2个Ricci曲率满足

$$Ric_{(2)} > c + \frac{n^2}{8(n-2)}H^2,$$

那么M拓扑同胚于标准球面$\mathbb{S}^n$.

(2) 如果M的第2个Ricci曲率满足

$$Ric_{(2)} > \left(2 - \frac{4}{n}\right)c + \frac{n}{4}H^2,$$

那么M微分同胚于标准球面$\mathbb{S}^n$.

第二章　超曲面平均曲率流解的延拓性定理

本章研究曲率积分条件下黎曼流形中超曲面平均曲率流解的可延拓性.

假设(M,g)和(N,h)分别是n维和$n+1$维紧致无边黎曼流形, $F_t: M^n \to N^{n+1}$是一族光滑浸入超曲面. 我们称$M_t = F_t(M)$为黎曼流形中超曲面平均曲率流的解, 如果F_t满足

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}F(x,t) &= -H(x,t)\nu(x,t), \\ F(x,0) &= F_0(x), \end{cases}$$

其中$F(x,t) = F_t(x)$, $H(x,t)$为超曲面$M_t = F_t(M)$在点x处的平均曲率, $\nu(x,t)$为单位外法向量, F_0为给定的初始超曲面.

上世纪七十年代, K. Brakke[5]首先从几何测度论的角度研究了平均曲率流. 之后, G. Huisken[33, 34, 35]对超曲面的平均曲率流进行了一系列研究. 他证明了: 若欧氏空间中超曲面的第二基本形式关于时间一致有界, 则平均曲率流在时间上可以向后延拓. N. Šešum[51]利用爆破的方法证明: 如果黎曼流形的Ricci曲率关于时间一致有界, 那么Ricci流的解关于时间可以延拓. 最近, B. Wang[68]证明了在曲率积分条件下Ricci流的解关于时间的可延拓性定理. 受其启发, 我们研究了平均曲率流的解在曲率积分条件下关于时间的可延拓性问题.

2.1　主要结果

1984年, G. Huisken证明了逐点拼挤条件下超曲面的平均曲率流解的可延拓性定理.

定理A.[33] 设$0 < T < \infty$. *如果欧氏空间中紧致超曲面的平均曲率流的第二基本形式关于时间一致有界, 即存在与时间无关的常数C, 使得在时间区间$[0,T)$上有*

$$\max_{M_t}|A| \le C,$$

那么该平均曲率流的解可以延拓到时间T之后.

B. Wang给出了曲率积分条件下Ricci流的解关于时间的可延拓性定理.

定理B.[68] *设$(M^n, g(t))$是Ricci流在时间区间$[0,T)$上的解，其中$T < \infty$. 如果*
(1)存在正常数C，使得对所有$(x,t) \in M \times [0,T)$，有$Ric(x,t) \geq -C$,
(2)$\|R\|_{\alpha, M\times[0,T)} = \left(\int_0^T \int_M |R|^\alpha d\mu dt\right)^{\frac{1}{\alpha}} < \infty$，其中$\alpha$为满足$\alpha \geq \frac{n+2}{2}$的某个常数,
那么Ricci流的解可以延拓到时间T之后.

一个自然的想法是，能否给出曲率积分条件下平均曲率流解的可延拓性定理. 在本章中，假设外围流形N具有有界几何性质，即(i)N的截面曲率有界；(ii)N的单射半径具有正的下界. 设N的截面曲率K_N满足$-K_1 \leq K_N \leq K_2$，其中K_1和K_2为非负常数；设N的单射半径具有正的下界i_N. 运用Moser迭代的方法，我们在曲率积分条件下证明一般黎曼流形中超曲面平均曲率流的解关于时间的可延拓性定理.

定理1. *设N^{n+1}为具有有界几何性质的$n+1$维黎曼流形，$F_t: M^n \longrightarrow N^{n+1}$为闭超曲面$M$上的平均曲率流在时间区间$[0,T)$上的解，其中$T < \infty$. 如果*
(1)存在正常数C，使得对所有$(x,t) \in M \times [0,T)$，有$h_{ij} \geq -C$,
(2)$\|H\|_{\alpha, M\times[0,T)} = \left(\int_0^T \int_{M_t} |H|^\alpha d\mu_t dt\right)^{\frac{1}{\alpha}} < \infty$，其中$\alpha$为满足$\alpha \geq n+2$的某个常数,
那么该平均曲率流的解可以延拓到时间T之后.

定理2. *设N^{n+1}为具有有界几何性质的$n+1$维黎曼流形，N^{n+1}的截面曲率K_N满足$-K_1 \leq K_N \leq K_2$，其中K_1和K_2是非负常数. 设$F_t: M^n \longrightarrow N^{n+1}$为闭超曲面$M$上的平均曲率流在时间区间$[0,T)$上的解，其中$T < \infty$. 如果*
(1)当$t=0$时，$H^2 > n^2 K_1$,
(2)$\|H\|_{\alpha, M\times[0,T)} = \left(\int_0^T \int_{M_t} |H|^\alpha d\mu_t dt\right)^{\frac{1}{\alpha}} < \infty$，其中$\alpha$为满足$\alpha \geq n+2$的某个常数,
那么该平均曲率流的解可以延拓到时间T之后.

对于定理1中外围空间为欧氏空间$\mathbb{R}^{n+1}$的情形, N. Le和N. Šešum[40]使用不同的方法也得出了相同的结论.

以下的例子说明在外围空间N^{n+1}为完备单连通空间形式的情况下, 定理1和2中的条件$\alpha \geq n+2$是最佳的.

例. (i) 对于$N^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$的情形, 令$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$. 设$F$为$\mathbb{S}^n$到$\mathbb{R}^{n+1}$中的标准等距嵌入. 则$F(t) = \sqrt{1-2nt}F$是平均曲率流的解, 并且$[0, \frac{1}{2n})$是解的最大存在时间区间. 通过计算可得$g_{ij}(t) = (1-2nt)g_{ij}$, $H(t) = \frac{n}{\sqrt{1-2nt}}$且$h_{ij}(t) > 0$. 则

$$\begin{aligned} \|H\|_{\alpha, M\times[0,T)} &= \left(\int_0^T \int_{M_t} |H|^\alpha d\mu_t dt\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= C_1 \left(\int_0^T (T-t)^{\frac{n-\alpha}{2}} dt\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \end{aligned}$$

其中C_1是正常数. 于是有

$$\|H\|_{\alpha, M\times[0,T)} \begin{cases} = \infty, & \alpha \geq n+2, \\ < \infty, & \alpha < n+2. \end{cases}$$

这说明当$N^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$时定理1和2中的条件$\alpha \geq n+2$是最佳的.

(ii)假设$\mathbb{F}^{n+1}(c)$是具有常曲率c的完备单连通空间形式, 其中$c = 1$或-1. $N^{n+1} = \mathbb{F}^{n+1}(c)$的情形, 即为$N^{n+1} = \mathbb{S}^{n+1}$或$N^{n+1} = \mathbb{H}^{n+1}$. 设$M = \mathbb{S}^n(r_0)$是$N^{n+1}$中半径为$r_0$的全脐球面, 其平均曲率为常数$H_0$, 并且

$$H_0 > \begin{cases} 0, & c = 1, \\ n^2, & c = -1. \end{cases}$$

令$d = \frac{H_0^2}{H_0^2 + n^2 c}$. 设$\mathbb{S}^n(r(t))$是半径为$r(t) = \frac{\sqrt{H_0^2+n^2c}}{\sqrt{H^2(t)+n^2c}} r_0$的球面, 其中$H(t) = \sqrt{\frac{n^2 c d e^{2nct}}{1-de^{2nct}}}$. 则$\mathbb{S}^n(r(t))$是一族具有常平均曲率$H(t)$的全脐球面, 它们满足以$M = \mathbb{S}^n(r_0) \subset N^{n+1}$为初始曲面的平均曲率流. 则解的最大存在时间

$$T = \begin{cases} -\frac{\ln d}{2n}, & c = 1, \\ \frac{\ln d}{2n}, & c = -1. \end{cases}$$

第二基本形式满足$h_{ij} > 0$, $\mathbb{S}^n(r(t))$的体积$V(t) = \left(\frac{H_0^2+n^2c}{H^2(t)+n^2c}\right)^{\frac{n}{2}} V_0$, 其中$V_0$是$\mathbb{S}^n(r_0)$的体积. 则有

$$\begin{aligned}
\|H\|_{\alpha,M\times[0,T)} &= \left(\int_0^T \int_{M_t} |H|^\alpha d\mu_t dt\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= \left(\int_0^T H^\alpha(t)V(t)dt\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= C_2\left(\int_0^T (n^{2-n}de^{2nct})^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{1-de^{2nct}}{c}\right)^{\frac{n-\alpha}{2}} dt\right)^{\frac{1}{\alpha}},
\end{aligned}$$

其中C_2是正常数. 由T的有限性可知$(n^{2-n}de^{2nct})^{\frac{\alpha}{2}}$具有正的上界和下界, 并且

$$\int_0^T \left(\frac{1-de^{2nct}}{c}\right)^{\frac{n-\alpha}{2}} dt \begin{cases} =\infty, & \alpha \geq n+2, \\ <\infty, & \alpha < n+2. \end{cases}$$

于是

$$\|H\|_{\alpha,M\times[0,T)} \begin{cases} =\infty, & \alpha \geq n+2, \\ <\infty, & \alpha < n+2. \end{cases}$$

这说明当$N^{n+1} = \mathbb{S}^{n+1}$或者$N^{n+1} = \mathbb{H}^{n+1}$时定理1和2中的条件$\alpha \geq n+2$是最佳的.

2.2 准备工作

假设(M,g)是n维紧致无边流形, $F_t : M^n \to N^{n+1}$是一族到黎曼流形(N,h)中的光滑浸入. 记M的诱导度量和第二基本形式分别为$g = \{g_{ij}\}$和$A = \{h_{ij}\}$, M的平均曲率H为第二基本形式A的迹. 记$\bar{\nabla}$和$\bar{R}ic$分别为黎曼流形N上的联络和曲率张量. 选取适当的局部标架使得$e_0 = \nu$, 记N在此标架下的曲率张量的分量为$R_{ABCD}, (A,B,C,D = 0,1,\cdots,n)$.

首先, 我们给出一般黎曼流形中超曲面的平均曲率流的一些发展方程.

引理2.1.[20, 34] 对于黎曼流形中的平均曲率流, 有以下的发展方程

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} &= -2Hh_{ij}, \\
\frac{\partial |A|^2}{\partial t} &= \Delta |A|^2 - 2|\nabla A|^2 + 2|A|^2(|A|^2 + \bar{R}ic(\nu,\nu)) \\
&\quad -4(h^{ij}h_j^m \bar{R}_{mli}{}^l - h^{ij}h^{lm}\bar{R}_{milj}) - 2h^{ij}(\bar{\nabla}_j \bar{R}_{0li}{}^l + \bar{\nabla}_l \bar{R}_{0ij}{}^l), \\
\frac{\partial}{\partial t} H &= \Delta H + H(|A|^2 + \bar{R}ic(\nu,\nu)).
\end{aligned}
$$

下面的Sobolev不等式将在定理的证明中用到.

引理2.2.[32] 设M^n为黎曼流形N^{n+p}中的$n(\geq 2)$维闭子流形, 且N的截面曲率K_N满足$K_N \leq b^2$. 设h为M上的非负C^1函数. 则有

$$
\left(\int_M h^{\frac{n}{n-1}} d\mu \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq C(n,\alpha) \int_M \Big[|\nabla h| + h|H| \Big] d\mu,
$$

其中

$$
b^2(1-\alpha)^{-\frac{2}{n}}(\omega_n^{-1} Vol(supp\ h))^{\frac{2}{n}} \leq 1, \ \ 2\rho_0 \leq i_N,
$$

且

$$
\rho_0 = \begin{cases} b^{-1}\sin^{-1} b(1-\alpha)^{-\frac{1}{n}}(\omega_n^{-1} Vol(supp\ h))^{\frac{1}{n}}, & b\text{为实数}, \\ (1-\alpha)^{-\frac{1}{n}}(\omega_n^{-1} Vol(supp\ h))^{\frac{1}{n}}, & b\text{为虚数}. \end{cases}
$$

这里α为自由参数, $0 < \alpha < 1$, 且

$$
C(n,\alpha) = \frac{1}{2}\pi \cdot 2^{n-2}\alpha^{-1}(1-\alpha)^{-\frac{1}{n}} \frac{n}{n-1} \omega_n^{-\frac{1}{n}}.
$$

对于b为虚数的情形, 可以省略$C(n,\alpha)$中的$\frac{1}{2}\pi$.

下面的引理给出了Sobolev不等式的一个适当的形式, 这将在定理的证明中直接使用.

引理2.3. 设M^n为黎曼流形N^{n+p}中的$n(\geq 3)$维闭子流形, 且N的截面曲率K_N满足$K_N \leq b^2$. 设f为M上的非负C^1函数, 满足

$$
K_2(n+1)^{\frac{2}{n}}(\omega_n^{-1} Vol(supp\ f))^{\frac{2}{n}} \leq 1, \tag{2.1}
$$

$$2K_2^{-\frac{1}{2}}\sin^{-1}K_2^{\frac{1}{2}}(n+1)^{\frac{1}{n}}(\omega_n^{-1}Vol(supp\ f))^{\frac{1}{n}}\leq i_N. \qquad (2.2)$$

则有

$$\begin{aligned}\int_M|\nabla f|^2d\mu \ \geq\ & \frac{(n-2)^2}{4(n-1)(1+s)}\\ & \times\left[\frac{1}{C^2(n)}\left(\int_M f^{\frac{2n}{n-2}}d\mu\right)^{\frac{n-2}{n}}-H_0^2\left(1+\frac{1}{s}\right)\int_M f^2d\mu\right],(2.3)\end{aligned}$$

其中$H_0=\max_{x\in M}|H|$, $C(n)=C(n,\frac{n}{n+1})$, $s>0$为自由参数.

证明. 对所有满足引理条件的非负函数$g\in C^1(M)$, 由引理2可知

$$\left(\int_M g^{\frac{n}{n-1}}d\mu\right)^{\frac{n-1}{n}}\leq C(n)\int_M(|\nabla g|+g|H|)d\mu.$$

将$g=f^{\frac{2(n-1)}{n-2}}$代入可得

$$\left(\int_M f^{\frac{2n}{n-2}}d\mu\right)^{\frac{n-1}{n}}\leq\frac{2(n-1)}{n-2}C(n)\int_M f^{\frac{n}{n-2}}|\nabla f|d\mu+C(n)\int_M Hf^{\frac{2(n-1)}{n-2}}d\mu.$$

由Hölder不等式可知

$$\left(\int_M f^{\frac{2n}{n-2}}d\mu\right)^{\frac{n-2}{2n}}\leq C(n)\left[\frac{2(n-1)}{n-2}\left(\int_M|\nabla f|^2d\mu\right)^{\frac{1}{2}}+H_0\left(\int_M f^2d\mu\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

于是得到

$$\begin{aligned}\left(\int_M f^{\frac{2n}{n-2}}d\mu\right)^{\frac{n-2}{n}}\ \leq\ & C^2(n)\left[\frac{4(n-1)^2(1+s)}{(n-2)^2}\int_M|\nabla f|^2d\mu\right.\\ & \left.+|H|_0^2\left(1+\frac{1}{s}\right)\int_M f^2d\mu\right],\end{aligned}$$

引理证毕.

2.3 平均曲率的估计

本节证明关于平均曲率的一个估计式, 这一结果将在定理1和2的证明中用到.

引理2.4. 设$F_t: M^n \longrightarrow N^{n+1}$ $(n \geq 3)$为$t \in [0, T_0]$上的平均曲率流，并且第二基本形式A在时间区间$[0, T_0]$上一致有界. 则有

$$\max_{(x,t)\in M\times[\frac{T_0}{2},T_0]} H^2(x,t) \leq C_3 \left(\int_0^{T_0}\int_{M_t} |H|^{n+2} d\mu_t dt\right)^{\frac{2}{n+2}},$$

其中C_3为依赖于n，T_0，$\sup_{(x,t)\in M\times[0,T_0]}|A|$，$K_1$，$K_2$和$N$的单射半径下界$i_N(> 0)$的常数.

证明. 我们应用抛物方程的Moser迭代方法证明. 由引理2.1中的发展方程可以得到H^2的发展方程

$$\frac{\partial}{\partial t}H^2 = \triangle H^2 - 2|\nabla H|^2 + 2H^2|A|^2 + 2H^2\bar{R}ic(\nu,\nu).$$

由于$|A|$一致有界, 因此可得

$$\frac{\partial}{\partial t}H^2 \leq \triangle H^2 + \beta H^2, \tag{2.4}$$

其中β是与n, $\sup_{(x,t)\in M\times[0,T_0]}|A|$和$K_2$相关的正常数.

对于任意的$0 < R < R' < \infty$和$x \in M$, 令

$$\eta = \begin{cases} 1 & x \in B_{g(0)}(x,R), \\ \eta \in [0,1] \text{ 且 } |\nabla\eta|_{g(0)} \leq \frac{1}{R'-R} & x \in B_{g(0)}(x,R') \setminus B_{g(0)}(x,R), \\ 0 & x \in M \setminus B_{g(0)}(x,R'). \end{cases}$$

取充分小的R', 使得η关于度量$g(0)$满足引理2.3的条件(2.1)和(2.2). 因为M上某个确定区域的面积沿平均曲率流递减, 故而η关于度量$g(t)$($t \in [0,T_0]$)仍然满足引理2.3的条件(2.1)和(2.2). 令$f = |H|^2$, $B(R') = B_{g(0)}(x,R')$, 则由(2.4)可知, 对于任意的$p \geq 2$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial t}\int_{B(R')} f^p\eta^2 d\mu_t \leq & \int_{B(R')} \eta^2 f^{p-1}\triangle f d\mu_t \\ & + \int_{B(R')} \beta f^p\eta^2 d\mu_t + \frac{1}{p}\int_{B(R')} f^p\eta^2\frac{\partial}{\partial t}d\upsilon_t d\mu_t. \end{aligned}$$

对上式分部积分得到

$$\begin{aligned}\int_{B(R')}\eta^2 f^{p-1}\Delta f d\mu_t &= -\frac{4(p-1)}{p^2}\int_{B(R')}|\nabla(f^{\frac{p}{2}}\eta)|^2 d\mu_t+\frac{4}{p^2}\int_{B(R')}|\nabla\eta|^2 f^p d\mu_t\\ &\quad +\frac{4(p-2)}{p^2}\int_{B(R')}\nabla(f^{\frac{p}{2}}\eta)f^{\frac{p}{2}}\nabla\eta d\mu_t\\ &\le -\frac{2}{p}\int_{B(R')}|\nabla(f^{\frac{p}{2}}\eta)|^2 d\mu_t+\frac{2}{p}\int_{B(R')}|\nabla\eta|^2 f^p d\mu_t.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial t}\int_{B(R')}f^p\eta^2 d\mu_t &\le -\frac{2}{p}\|\nabla(f^{\frac{p}{2}}\eta)\|_2^2+\beta\|f^{\frac{p}{2}}\eta\|_2^2\\ &\quad +\frac{2}{p}\int_{B(R')}|\nabla\eta|^2 f^p d\mu_t+\frac{1}{p}\int_{B(R')}f^p\eta^2\frac{\partial}{\partial t}dv_t d\mu_t\\ &\le -\frac{2}{p}\|\nabla(f^{\frac{p}{2}}\eta)\|_2^2+\beta\|f^{\frac{p}{2}}\eta\|_2^2+\frac{2}{p}\int_{B(R')}|\nabla\eta|^2 f^p d\mu_t.\end{aligned}$$

于是得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_{B(R')}f^p\eta^2 d\mu_t &+ \int_{B(R')}|\nabla(f^{\frac{p}{2}}\eta)|^2 d\mu_t\\ &\le 2\int_{B(R')}|\nabla\eta|^2 f^p d\mu_t+\beta p\int_{B(R')}f^p\eta^2 d\mu_t. \qquad (2.5)\end{aligned}$$

对任意的$0<\tau<\tau'<T_0$, 定义$[0,T_0]$上的函数ψ:

$$\psi(t)=\begin{cases}0 & 0\le t\le\tau,\\ \frac{t-\tau}{\tau'-\tau} & \tau\le t\le\tau',\\ 1 & \tau'\le t\le T_0.\end{cases}$$

对(2.5)两边乘以$\psi(t)$得到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi\int_{B(R')}f^p\eta^2 d\mu_t\right)+\psi\int_{B(R')}|\nabla(f^{\frac{p}{2}}\eta)|^2 d\mu_t\\ \le&2\psi\int_{B(R')}|\nabla\eta|^2 f^p d\mu_t+(\beta p\psi+\psi')\int_{B(R')}f^p\eta^2 d\mu_t.\end{aligned} \qquad (2.6)$$

对任意的$t\in[\tau',T_0]$, (2.6)在$[\tau,t]$上积分得

$$\begin{aligned}&\int_{B(R')}f^p\eta^2 d\mu_t+\int_{\tau'}^{t}\int_{B(R')}|\nabla(f^{\frac{p}{2}}\eta)|^2 d\mu_t dt\\ \le\ &2\int_{\tau}^{T_0}\int_{B(R')}|\nabla\eta|^2 f^p d\mu_t dt+\left(\beta p+\frac{1}{\tau'-\tau}\right)\int_{\tau}^{T_0}\int_{B(R')}f^p\eta^2 d\mu_t dt.\end{aligned}$$

对于充分小的R', 以下的Sobolev不等式成立

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{B(R')} f^{\frac{pn}{n-2}}\eta^{\frac{2n}{n-2}}d\mu_t\right)^{\frac{n-2}{n}} &= \| f^{\frac{p}{2}}\eta \|^2_{\frac{2n}{n-2}} \\
&\le \frac{4(n-1)^2(1+s)C^2(n)}{(n-2)^2}\int_{B(R')}|\nabla(f^{\frac{p}{2}}\eta)|^2 d\mu_t \\
&\quad + H_0^2C^2(n)\Big(1+\frac{1}{s}\Big)\int_{B(R')} f^p\eta^2 d\mu_t.
\end{aligned}
$$

因此得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{\tau'}^{T_0}\int_{B(R')} f^{p(1+\frac{2}{n})}\eta^{2+\frac{4}{n}}d\mu_t dt \\
\le\ & \int_{\tau'}^{T_0}\left(\int_{B(R')} f^p\eta^2 d\mu_t\right)^{\frac{2}{n}}\left(\int_{B(R')} f^{\frac{np}{n-2}}\eta^{\frac{2n}{n-2}}d\mu_t\right)^{\frac{n-2}{n}}dt \\
\le\ & \max_{t\in[\tau',T_0]}\left(\int_{B(R')} f^p\eta^2 d\mu_t\right)^{\frac{2}{n}}\times\int_{\tau}^{T_0}\Big[\frac{4(n-1)^2(1+s)C^2(n)}{(n-2)^2}\int_{B(R')}|\nabla(f^{\frac{p}{2}}\eta)|^2 d\mu_t \\
& + H_0^2C^2(n)\Big(1+\frac{1}{s}\Big)\int_{B(R')} f^p\eta^2 d\mu_t\Big]dt \\
\le\ & C_4\max_{t\in[\tau',T_0]}\left(\int_{B(R')} f^p\eta^2 d\mu_t\right)^{\frac{2}{n}}\times\int_{\tau}^{T_0}\Big[\int_{B(R')}|\nabla(f^{\frac{p}{2}}\eta)|^2 d\mu_t+\int_{B(R')} f^p\eta^2 d\mu_t\Big]dt \\
\le\ & C_4\Big[2\int_{\tau}^{T_0}\int_{B(R')}|\nabla\eta|^2 f^p d\mu_t dt \\
& + \Big(\beta p+\frac{1}{\tau'-\tau}\Big)\int_{\tau}^{T_0}\int_{B(R')} f^p\eta^2 d\mu_t dt\Big]^{1+\frac{2}{n}},
\end{aligned}
$$

这里我们取$s=1$, 且C_4为依赖于n和$\sup_{(x,t)\in M\times[0,T_0]}|A|$的常数.

由于$|\nabla\eta|_{g(t)}\le|\nabla\eta|^2_{g(0)}e^{lt}$, 其中$l=\max_{0\le t\le T_0}\|\frac{\partial g}{\partial t}\|_{g(t)}$, 因此

$$
\begin{aligned}
\int_{\tau}^{T_0}\int_{B(R')}|\nabla\eta|^2 f^p d\mu_t dt &\le \int_{\tau}^{T_0}\int_{B(R')}\Big(|\nabla\eta|_{g(0)}e^{\frac{1}{2}lt}\Big)^2 f^p d\mu_t dt \\
&\le \frac{e^{C_5T_0}}{(R'-R)^2}\int_{\tau}^{T_0}\int_{B(R')} f^p d\mu_t dt,
\end{aligned}
$$

这里C_5是只与n和$\sup_{(x,t)\in M\times[0,T_0]}|A|$有关的常数. 于是得到

$$\begin{aligned}\int_\tau^{T_0}\int_{B(R)} f^{p(1+\frac{2}{n})}d\mu_t dt &\le C_4\left(\beta p+\frac{1}{\tau'-\tau}+\frac{2e^{C_5T_0}}{(R'-R)^2}\right)^{1+\frac{2}{n}}\\ &\quad\times\left(\int_\tau^{T_0}\int_{B(R')} f^p d\mu_t dt\right)^{1+\frac{2}{n}}. \qquad (2.7)\end{aligned}$$

令$L(p,t,R)=\int_t^{T_0}\int_{B(R)} f^p$, 则(2.7)可以表示为

$$L\Big(p\Big(1+\frac{2}{n}\Big),\tau',R\Big)\le C_4\left(\beta p+\frac{1}{\tau'-\tau}+\frac{2e^{C_5T_0}}{(R'-R)^2}\right)^{1+\frac{2}{n}} L(p,\tau,R')^{1+\frac{2}{n}}. \quad (2.8)$$

记$\mu=1+\frac{2}{n}$, $p_k=\frac{n+2}{2}\mu^k$, $\tau_k=\Big(1-\frac{1}{\mu^{k+1}}\Big)t$, $R_k=\frac{R'}{2}\Big(1+\frac{1}{\mu^{k/2}}\Big)$, 其中$k=0,1,2,\cdots$. 则由(2.8)可得

$$\begin{aligned}L(p_{k+1},\tau_{k+1},R_{k+1})^{\frac{1}{p_{k+1}}} &\le C_4^{\frac{1}{p_{k+1}}}\Big[\frac{(n+2)\beta}{2}+\frac{\mu^2}{\mu-1}\cdot\frac{1}{t}+\frac{8e^{C_5T_0}}{R'^2}\cdot\frac{\mu}{(\sqrt{\mu}-1)^2}\Big]^{\frac{1}{p_k}}\\ &\quad\times\mu^{\frac{k}{p_k}}L(p_k,\tau_k,R_k)^{\frac{1}{p_k}}.\end{aligned}$$

因此对任意的$m\ge 1$, 有

$$\begin{aligned}&L(p_{m+1},\tau_{m+1},R_{m+1})^{\frac{1}{p_{m+1}}}\\ \le\ & C_4^{\sum_{k=0}^m\frac{1}{p_{k+1}}}\Big[\frac{(n+2)\beta}{2}+\frac{\mu^2}{\mu-1}\cdot\frac{1}{t}+\frac{8e^{C_5T_0}}{R'^2}\cdot\frac{\mu}{(\sqrt{\mu}-1)^2}\Big]^{\sum_{k=0}^m\frac{1}{p_k}}\\ &\times\mu^{\sum_{k=0}^m\frac{k}{p_k}}L(p_0,\tau_0,R_0)^{\frac{1}{p_0}}.\end{aligned}$$

令$m\to+\infty$, 得到

$$f(x,t)\le C_6^{\frac{n}{n+2}}\Big(C_6+\frac{1}{t}+\frac{e^{C_5T_0}}{R'^2}\Big)\Big(1+\frac{2}{n}\Big)^{\frac{n}{2}}\left(\int_0^{T_0}\int_{M_t} f^{\frac{n+2}{2}}d\mu_t dt\right)^{\frac{2}{n+2}}, \quad (2.9)$$

其中C_6是依赖于n, $\sup_{M\times[0,T]}|A|$, K_1和K_2的正常数.

现在我们取充分小的R', 使得

$$K_2(n+1)^{\frac{2}{n}}(\omega_n^{-1}Vol_{g(0)}(B(R'))^{\frac{2}{n}}\le 1, \quad (2.10)$$

$$2K_2^{-\frac{1}{2}}\sin^{-1}K_2^{\frac{1}{2}}(n+1)^{\frac{1}{n}}(\omega_n^{-1}Vol_{g(0)}(B(R'))^{\frac{1}{n}}\le i_N. \quad (2.11)$$

对于度量$g(0)$, 存在依赖于n, $\max_{x\in M_0}|A|$, K_1和K_2的非正常数K, 使得M_0的截面曲率以K为下界. 由Bishop-Gromov体积比较定理, 我们有

$$Vol_{g(0)}(B(R')) \le Vol_K(B(R')),$$

其中$Vol_K(B(R'))$是具有常曲率K的n维完备单连通空间形式中半径为R'的球的体积. 令R'为满足以下两个不等式的最大值:

$$K_2(n+1)^{\frac{2}{n}}(\omega_n^{-1}Vol_K(B(R'))^{\frac{2}{n}} \le 1,$$

$$2K_2^{-\frac{1}{2}}\sin^{-1}K_2^{\frac{1}{2}}(n+1)^{\frac{1}{n}}(\omega_n^{-1}Vol_K(B(R'))^{\frac{1}{n}} \le i_N.$$

则R'依赖于n, K_1, K_2, i_N和$\sup_{M\times[0,T_0]}|A|^2$, 并且$Vol_{g(0)}(B(R'))$满足不等式(2.10)和(2.11). 于是由(2.9)式得到

$$\max_{(x,t)\in M\times[\frac{T_0}{2},T_0]}|H|^2(x,t) \le C_3\left(\int_0^{T_0}\int_{M_t}|H|^{n+2}d\mu_t dt\right)^{\frac{2}{n+2}},$$

其中C_3为依赖于n, T_0, $\sup_{(x,t)\in M\times[0,T_0]}|A|$, K_1, K_2和i_N的正常数. 引理证毕.

2.4　曲率积分有限的平均曲率流的可延拓性

本节给出定理1和2的证明.

定理1的证明. 根据Hölder不等式, 若$\alpha > n+2$, 则由$\|H\|_{\alpha,M\times[0,T)} < \infty$可以推出$\|H\|_{n+2,M\times[0,T)} < \infty$, 因此我们只需要证明在$\alpha = n+2$时定理成立.

我们采用反证法证明. 假设平均曲率流的解不能延拓到时间T之后, 则当$t\to T$时, $|A|\to+\infty$. 由定理1的条件$h_{ij}\ge -C$可得

$$\sum_{i,j}(h_{ij}+C)^2 \le C_7[tr(h_{ij}+C)]^2,$$

其中C_7是只与n有关的正常数. 由$|A|^2\to+\infty$推得$\sum_{i,j}(h_{ij}+C)^2\to+\infty$. 又因为

$$[tr(h_{ij}+C)]^2 = (H+nC)^2 = H^2 + 2nCH + n^2C^2,$$

所以

$$\sup_{(x,t)\in M\times[0,T)} H^2(x,t) = \infty.$$

选取递增的时间序列$t^{(i)}$, $i=1,2,\cdots$, 使得$\lim_{i\to\infty}t^{(i)}=T$. 取点列$x^{(i)}\in M$, 满足

$$H^2(x^{(i)},t^{(i)})=\max_{(x,t)\in M\times[0,t^{(i)}]}H^2(x,t).$$

则有$\lim_{i\to\infty}H^2(x^{(i)},t^{(i)})=\infty$.

令$Q^{(i)}=H^2(x^{(i)},t^{(i)})$, 则$\lim_{i\to\infty}Q^{(i)}=\infty$. 又由于$\lim_{i\to\infty}t^{(i)}=T>0$, 因此存在正整数$i_0$, 使得当$i\geq i_0$时$Q^{(i)}t^{(i)}\geq 1$并且$Q^{(i)}\geq 1$. 定义

$$F^{(i)}(t)=F\left(\frac{t-1}{Q^{(i)}}+t^{(i)}\right):(M,g^{(i)}(t))\longrightarrow(N,Q^{(i)}h).$$

记$H_{(i)}$和$g^{(i)}(t)=F^{(i)}(t)^*(Q^{(i)}h)$分别为$F^{(i)}(t)$的平均曲率向量和由$F^{(i)}(t)$诱导的$M$上的度量, 则$F^{(i)}(t):M\to N^{n+1}$仍然是平均曲率流在时间区间$[0,1]$上的解. 由于在$M\times[0,T)$上$F_t$满足$h_{ij}\geq -C$, 因此在$M\times[0,1]$上有

$$H_{(i)}^2(x,t)\leq 1,\quad h_{jk}^{(i)}\geq -\frac{C}{\sqrt{Q^{(i)}}},\tag{2.12}$$

其中$A^{(i)}=h_{jk}^{(i)}$为$F^{(i)}(t)$的第二基本形式. 由(2.12)可知$h_{jk}^{(i)}+\frac{C}{\sqrt{Q^{(i)}}}\geq 0$. 因此

$$h_{jk}^{(i)}+\frac{C}{\sqrt{Q^{(i)}}}\leq tr\left(h_{jk}^{(i)}+\frac{C}{\sqrt{Q^{(i)}}}\right)\leq H_{(i)}+\frac{nC}{\sqrt{Q^{(i)}}},$$

于是得到$h_{jk}^{(i)}\leq H_{(i)}+\frac{(n-1)C}{\sqrt{Q^{(i)}}}$. 由于$i\geq i_0$时$Q^{(i)}\geq 1$, 故$|A^{(i)}|\leq C_8$, 其中$C_8$是与$i$无关的常数. 考虑$(M,g^{(i)}(t),x^{(i)})$, $t\in[0,1]$. 由[15]中的收敛性结果可知, 序列$(M^{(i)},g^{(i)}(t),x^{(i)})$收敛到黎曼流形$(\widetilde{M},\widetilde{g}(t),\widetilde{x})$, 并且相应的浸入序列$F^{(i)}(t)$收敛到浸入$\widetilde{F}(t):\widetilde{M}\to\mathbb{R}^{n+1}$, $t\in[0,1]$.

由于(N,h)具有有界几何, 并且当$i\geq i_0$时$Q^{(i)}\geq 1$, 因此对每个$i\geq i_0$, $(N,Q^{(i)}h)$也具有有界几何, 并且具有与(N,h)相同的上界和下界常数. 则由引理2.4可知

$$\max_{(x,t)\in M^{(i)}\times[\frac{1}{2},1]}H_{(i)}^2(x,t)\leq C_9\left(\int_0^1\int_{M_t}|H_{(i)}|^{n+2}d\mu_{g^{(i)}(t)}dt\right)^{\frac{2}{n+2}},$$

其中C_9是与i无关的常数. 于是推出

$$
\begin{aligned}
\max_{(x,t)\in\widetilde{M}\times[\frac{1}{2},1]}\widetilde{H}^2(x,t) &\le \lim_{i\to\infty}C_9\left(\int_0^1\int_{M_t}|H_{(i)}|^{n+2}d\mu_{g^{(i)}(t)}dt\right)^{\frac{2}{n+2}}\\
&\le \lim_{i\to\infty}C_9\left(\int_{t^{(i)}}^{t^{(i)}+(Q^{(i)})^{-1}}\int_{M_t}|H|^{n+2}d\mu_t dt\right)^{\frac{2}{n+2}}\\
&= 0. \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

其中(2.13)中的等式成立应用了$\int_0^T\int_{M_t}H^{n+2}d\mu_t dt<+\infty$并且$\lim_{i\to\infty}(Q^{(i)})^{-1}=0$. 另一方面, 由点列的选取方式可知

$$\widetilde{H}^2(\bar{x},1)=\lim_{i\to\infty}H_{(i)}^2(x^{(i)},1)=1.$$

这与(2.13)式矛盾. 这就证明了定理1.

应用类似的方法可以证明定理2.

定理2的证明. 根据Hölder不等式, 我们只需要证明在$\alpha=n+2$时定理成立.

由于$t=0$时$H^2>n^2K_1$, 并且M为紧致流形, 因此存在正常数ε, 使得$H^2\ge n^2K_1+\varepsilon$. 由$H^2$的发展方程可知该条件沿平均曲率流是保持的, 即$0<t<T$时也有$H^2\ge n^2K_1+\varepsilon$. 由于$t=0$时$H^2>n^2K_1$, 故$|A|^2\le C_{10}H^2$, 其中$C_{10}$为正常数. 令$f_0=\frac{|A|^2}{H^2}$, 我们有$f_0$的发展方程

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}f_0 &= \Delta f_0+\frac{2}{H}\langle\nabla_l H,\nabla_l f_0\rangle-\frac{2}{H^4}|\nabla_i H h_{kl}-\nabla_i h_{kl}H|^2\\
&\quad -\frac{1}{H^2}[4(h^{ij}h_{jl}\bar{R}^l_{mi}{}^m-h^{ij}h^{lm}\bar{R}_{iljm})+h^{ij}(\bar{\nabla}_j\bar{R}_{0li}{}^l+\bar{\nabla}_l\bar{R}_{0ij}{}^l)].
\end{aligned}
$$

所以有

$$\frac{\partial}{\partial t}f_0\le\Delta f_0+C_{11}f_0+C_{12},$$

其中C_{11}和C_{12}是与t无关的正常数. 根据极大值原理以及T的有限性, 存在与t无关的正常数C_{13}, 使得

$$|A|^2\le C_{13}H^2,\ t\in[0,T). \qquad (2.14)$$

我们仍然采用反证法证明. 假设平均曲率流的解不能延拓到时间T之后, 则当$t \to T$时, $|A| \to +\infty$. 于是由(2.14)可知, 当$t \to T$时, $|H| \to +\infty$. 记$(x^{(i)}, t^{(i)})$, $Q^{(i)}$, $F^{(i)}(t)$, $g^{(i)}(t)$ 和$(\widetilde{M}, \tilde{g}(t), \tilde{x})$与定理1的证明中表示的意义相同, $A^{(i)}$和$H_{(i)}$分别表示$F^{(i)}(t)$的第二基本形式和平均曲率向量. 则有$|A^{(i)}|^2 \le C_{13}|H_{(i)}|^2$, $(x,t) \in M \times [0,1]$, 这表明$A^{(i)}$具有与i无关的上界. 应用引理2.4的结论可知

$$\max_{(x,t)\in M^{(i)}\times[\frac{1}{2},1]} H^2_{(i)}(x,t) \le C_{14}\left(\int_0^1\int_{M_t} |H_{(i)}|^{n+2} d\mu_{g^{(i)}(t)} dt\right)^{\frac{2}{n+2}},$$

其中C_{14}是与i无关的常数. 类似于定理1的证明可以得到矛盾, 从而完成定理2的证明.

第三章　高余维平均曲率流解的延拓性定理

高余维的平均曲率流是平均曲率流最一般的情形, 关于平均曲率流的研究主要集中于超曲面的情形, 即余维数为1的平均曲率流. 对一般余维数的平均曲率流, 目前的研究结果较少. 现有的结果主要基于Guass映照条件, 或者图子流形、Lagrange子流形等特殊子流形.

假设M^n和N^{n+p}分别为n维和$n+p$维的紧致无边流形, $F: M^n \times [0,T) \to N^{n+p}$是一族光滑浸入子流形. 我们称$F_t$是以$F_0$为初始流形的高余维平均曲率流的解, 如果$F_t$满足

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}F(x,t) = H(x,t), \ \ x \in M, \ t \geq 0, \\ F(x,0) = F_0(x), \end{cases} \tag{3.1}$$

这里$H(x,t)$表示子流形$M_t = F(M,t)$在点x处的平均曲率向量, F_0为给定的初始子流形.

本章将曲率积分条件下超曲面平均曲率流解的延拓性定理拓广为一般余维数子流形中平均曲率流解的延拓性定理.

3.1　主要结果与准备工作

我们证明如果第二基本形式模长的平方以平均曲率平方的某个线性函数为上界, 且平均曲率在时空中的积分有限, 那么一般黎曼流形中高余维平均曲率流的解关于时间可以延拓.

定理3. *设N^{n+p}为具有有界几何性质的$n+p$维黎曼流形, F_t: $M^n \longrightarrow N^{n+p}$为闭子流形$M$上的平均曲率流在时间区间$[0,T)$上的解, 其中$T < \infty$. 如果*
(1)存在正常数a和b, 使得在$M_t, t \in [0,T)$上满足$|A|^2 \leq a|H|^2 + b$,
(2)$\|H\|_{\alpha, M\times[0,T)} = \left(\int_0^T \int_{M_t} |H|^\alpha d\mu_t dt\right)^{\frac{1}{\alpha}} < \infty$, 其中$\alpha$为满足$\alpha \geq n+2$的某个常数,
那么该平均曲率流的解可以延拓到时间T之后.

对于(5.1)中给出的平均曲率流方程, 记$1\le i,j,k,\cdots\le n$, $1\le A,B,C,\cdots\le n+d$, $n+1\le\alpha,\beta,\gamma,\cdots\le n+p$. 设$\{x^i\}$和$\{y^A\}$分别为$M$和$N$上的局部标架. 令$g=\sum g_{ij}dx^i\otimes dx^j$表示通过$F$从$N$上的度量$\langle,\rangle$诱导的$M$上的度量,

$$g_{ij}=\langle F_*(\frac{\partial}{\partial x^i}),F_*(\frac{\partial}{\partial x^j})\rangle.$$

记M上的体积形式为$d\mu=\sqrt{\det(g_{ij})}dx$. 对任意的$x\in M$, T_xM在$F^*(T_{F(x)}N)$中的正交补部分称为在点x处M在N中的法空间, 记作N_xM. 记$\bar\nabla$为N上的Levi-Civita联络. 对于N的切向量场U, V和W, N的黎曼曲率张量$\bar R$为

$$\bar R(U,V)W=-\bar\nabla_U\bar\nabla_VW+\bar\nabla_V\bar\nabla_UW+\bar\nabla_{[U,V]}W.$$

对于M的切向量场X和Y, M上的诱导联络∇记为

$$\nabla_XY=(\bar\nabla_XY)^\top,$$

其中$(\ )^\top$表示切向分量. M上的黎曼曲率张量记为R.

对于沿M的法向量场ξ, 法丛上的诱导联络$\nabla^\perp$记为

$$\nabla_X^\perp\xi=(\bar\nabla_X\xi)^\perp,$$

其中$(\ )^\perp$表示法向分量.

M的第二基本形式定义为$A(X,Y)=(\bar\nabla_XY)^\perp$, 平均曲率向量$H$为第二基本形式的迹. A的一阶共变微分记为

$$(\widetilde\nabla_XA)(Y,Z)=\nabla_X^\perp A(Y,Z)-A(\nabla_XY,Z)-A(Y,\nabla_XZ),$$

其中$\widetilde\nabla$是$T^*M\otimes T^*M\otimes NM$上的联络. 类似的, 可以定义$A$的二阶共变微分.

分别选取T_xM和N_xM的规范正交基$\{e_i\}_{i=1}^n$和$\{e_\alpha\}_{\alpha=n+1}^{n+p}$, 第二基本形式及其一阶和二阶微分的分量表示为

$$\begin{aligned}h_{ij}^\alpha=&\langle A(e_i,e_j)e_\alpha\rangle,\\ h_{ijk}^\alpha=&\langle(\widetilde\nabla_{e_k}A)(e_i,e_j),e_\alpha\rangle,\\ h_{ijkl}^\alpha=&\langle(\widetilde\nabla_{e_l}\widetilde\nabla_{e_k}A)(e_i,e_j),e_\alpha\rangle.\end{aligned}$$

A的Laplace算子定义为$\Delta h_{ij}^\alpha=\sum_k h_{ijkk}^\alpha$.

定义子流形的无迹第二基本形式为$\mathring{A} = A - \frac{1}{n} g \otimes H$, 其分量表达式为$\mathring{A}_{ij}^{\alpha} = h_{ij}^{\alpha} - \frac{1}{n} h_{kk}^{\alpha} \delta_{ij}$. 则有$\sum_i \mathring{A}_{ii}^{\alpha} = 0$.

记

$$
\begin{aligned}
R_{ijkl} &= g(R(e_i, e_j)e_k, e_l), \\
\bar{R}_{ABCD} &= \langle \bar{R}(e_A, e_B)e_C, e_D \rangle, \\
R_{ij\alpha\beta}^{\perp} &= \langle R^{\perp}(e_i, e_j)e_\alpha, e_\beta \rangle.
\end{aligned}
$$

则我们有如下的Gauss公式, Codazzi公式和Ricci公式.

$$
\begin{aligned}
R_{ijkl} &= \bar{R}_{ijkl} + h_{ik}^{\alpha} h_{jl}^{\alpha} - h_{il}^{\alpha} h_{jk}^{\alpha}, \\
h_{ijk}^{\alpha} - h_{ikj}^{\alpha} &= -\bar{R}_{\alpha ijk}, \\
R_{ij\alpha\beta}^{\perp} &= \bar{R}_{ij\alpha\beta} + h_{ik}^{\alpha} h_{jk}^{\beta} - h_{jk}^{\alpha} h_{ik}^{\beta}.
\end{aligned}
$$

设$F: M \times [0, T) \to N$是以$F_0: M^n \to N^{n+p}$为初始流形的平均曲率流. 我们回顾一下子流形的一些几何量的发展方程.

引理3.1.[70] *设M_t为平均曲率流的解, 则*

$$
\frac{\partial}{\partial t} d\mu_t = -|H|^2 d\mu_t,
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} h_{ij}^{\alpha} = & \Delta h_{ij}^{\alpha} + \bar{R}_{\alpha ijk,k} + \bar{R}_{\alpha kik,j} - 2\bar{R}_{lijk} h_{lk}^{\alpha} + 2\bar{R}_{\alpha\beta jk} h_{ik}^{\beta} \\
& + 2\bar{R}_{\alpha\beta ik} h_{jk}^{\beta} - \bar{R}_{lkik} h_{lj}^{\alpha} - \bar{R}_{lkjk} h_{li}^{\alpha} + \bar{R}_{\alpha k\beta k} h_{ij}^{\beta} \\
& - h_{im}^{\alpha}(h_{jm}^{\beta} h_{ll}^{\beta} - h_{lm}^{\beta} h_{jl}^{\beta}) - h_{km}^{\alpha}(h_{jm}^{\beta} h_{ik}^{\beta} - h_{km}^{\beta} h_{ij}^{\beta}) \\
& - h_{ik}^{\beta}(h_{jl}^{\beta} h_{kl}^{\alpha} - h_{kl}^{\beta} h_{jl}^{\alpha}) - h_{jk}^{\alpha} h_{ij}^{\beta} h_{ll}^{\beta} + h^{\beta} \langle e_\alpha, \bar{\nabla}_H e_\beta \rangle,
\end{aligned}
$$

其中$\bar{R}_{ABCD,E}$为$\bar{R}$的一阶微分$\bar{\nabla}\bar{R}$的分量.

在本章中, 假设外围流形N具有有界几何, 即(i)N的截面曲率有界; (ii)N的单射半径具有正的下界. 设N的截面曲率K_N满足$-K_1 \le K_N \le K_2$, 其中K_1和K_2为非负常数; 设N的单射半径具有正的下界i_N. 注意到第二章中引理2.2和2.3中的Sobolev不等式对高余维的情形也成立, 我们将在证明中直接使用.

3.2 平均曲率及其L^{n+2}-范数的估计

本节我们证明以下关于平均曲率及其L^{n+2}-范数的不等式.

引理3.2. 设$F_t : M^n \to N^{n+p}(n \geq 3)$为平均曲率流在时间区间$[0, T_0]$上的解, 且第二基本形式在时间区间$[0, T_0]$上一致有界. 则有

$$\max_{(x,t)\in M\times[\frac{T_0}{2},T_0]} |H|^2(x,t) \leq C_1 \left(\int_0^{T_0}\int_{M_t} |H|^{n+2} d\mu_t dt\right)^{\frac{2}{n+2}},$$

其中C_1为依赖于n, T_0, $\sup_{(x,t)\in M\times[0,T_0]}|A|$, K_1, K_2和i_N的正常数.

证明. 我们利用抛物方程Moser迭代的方法进行证明. 由引理3.1, 我们有$|H|^2$的发展方程

$$\frac{\partial}{\partial t}|H|^2 \ = \ \Delta|H|^2 - 2|\tilde{\nabla} H|^2 + 2|A|^2|H|^2 + 2h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{\beta}\bar{R}_{l\alpha l\beta}.$$

由于$|A|^2$一致有界, 因此有

$$\frac{\partial}{\partial t}|H|^2 \leq \Delta|H|^2 + \beta|H|^2,$$

其中β是只与n, T_0, $\sup_{(x,t)\in M\times[0,T_0]}|A|$, K_1, K_2和i_N相关的正常数.

对任意$0 < R < R' < \infty$和$x \in M$, 令

$$\eta = \begin{cases} 1 & x \in B_{g(0)}(x, R), \\ \eta \in [0,1] \text{ 且 } |\nabla\eta|_{g(0)} \leq \frac{1}{R'-R} & x \in B_{g(0)}(x, R') \setminus B_{g(0)}(x, R), \\ 0 & x \in M \setminus B_{g(0)}(x, R'). \end{cases}$$

由于$supp\ \eta \subseteq B_{g(0)}(x, R')$, 因此对于充分小的$R'$, η关于度量$g(0)$满足引理2.3的条件(2.1)和(2.2). 因为M上某个确定区域的面积沿平均曲率流递减, 故而η关于度量$g(t)(t \in [0, T_0])$仍然满足引理2.3的条件(2.1)和(2.2). 令$f = |H|^2$, $B(R') = B_{g(0)}(x, R')$, 则由$|H|^2$的发展方程可知, 对于任意的$q \geq 2$和充分小的R',

$$\begin{aligned} &\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial t}\int_{B(R')} f^q\eta^2 d\mu_t \\ \leq\ & \int_{B(R')} \left(\eta^2 f^{q-1}\Delta f + \beta f^q\eta^2\right) d\mu_t + \int_{B(R')} \frac{1}{q} f^q\eta^2 \frac{\partial}{\partial t} d\mu_t \\ \leq\ & \int_{B(R')} \left(\eta^2 f^{q-1}\Delta f + \beta f^q\eta^2\right) d\mu_t. \end{aligned}$$

对以上不等式两边积分得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{B(R')}\eta^2 f^{q-1}\Delta f d\mu_t\\
=&-\frac{4(q-1)}{q^2}\int_{B(R')}|\nabla(f^{\frac{q}{2}}\eta)|^2 d\mu_t+\frac{4}{q^2}\int_{B(R')}|\nabla\eta|^2 f^q d\mu_t\\
&+\frac{4(q-2)}{q^2}\int_{B(R')}\langle\nabla(f^{\frac{q}{2}}\eta),f^{\frac{q}{2}}\nabla\eta\rangle d\mu_t\\
\le&-\frac{2}{q}\int_{B(R')}|\nabla(f^{\frac{q}{2}}\eta)|^2 d\mu_t+\frac{2}{q}\int_{B(R')}|\nabla\eta|^2 f^q d\mu_t.
\end{aligned}
$$

由以上两个不等式可知

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial t}\int_{B(R')}f^q\eta^2 d\mu_t\le&-\frac{2}{q}\int_{B(R')}|\nabla(f^{\frac{q}{2}}\eta)|^2 d\mu_t\\
&+\beta\int_{B(R')}f^q\eta^2 d\mu_t+\frac{2}{q}\int_{B(R')}|\nabla\eta|^2 f^q d\mu_t.
\end{aligned}
$$

因此有

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\int_{B(R')}f^q\eta^2 d\mu_t+\int_{B(R')}|\nabla(f^{\frac{q}{2}}\eta)|^2 d\mu_t\\
&\qquad\le 2\int_{B(R')}|\nabla\eta|^2 f^q d\mu_t+\beta q\int_{B(R')}f^q\eta^2 d\mu_t.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

对任意的$0<\tau<\tau'<T_0$, 我们定义$[0,T_0]$上的函数ψ:

$$
\psi(t)=\begin{cases}0 & 0\le t\le\tau,\\ \frac{t-\tau}{\tau'-\tau} & \tau\le t\le\tau',\\ 1 & \tau'\le t\le T_0.\end{cases}
$$

则由(3.2)我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi\int_{B(R')}f^q\eta^2 d\mu_t\right)+\psi\int_{B(R')}|\nabla(f^{\frac{q}{2}}\eta)|^2 d\mu_t\\
\le&2\psi\int_{B(R')}|\nabla\eta|^2 f^q d\mu_t+(\beta q\psi+\psi')\int_{B(R')}f^q\eta^2 d\mu_t.
\end{aligned}
$$

对任意的$t\in[\tau',T_0]$, 将上式两边在时间区间$[\tau,t]$上积分可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{B(R')}f^q\eta^2 d\mu_t+\int_{\tau'}^{t}\int_{B(R')}|\nabla(f^{\frac{q}{2}}\eta)|^2 d\mu_t dt\\
\le&2\int_{\tau}^{T_0}\int_{B(R')}|\nabla\eta|^2 f^q d\mu_t dt+\left(\beta q+\frac{1}{\tau'-\tau}\right)\int_{\tau}^{T_0}\int_{B(R')}f^q\eta^2 d\mu_t dt.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

注意到第二章引理2.3中的Sobolev不等式(2.3)对于高余维的情形同样成立, 故

$$\begin{aligned}\left(\int_{B(R')} f^{\frac{qn}{n-2}}\eta^{\frac{2n}{n-2}}d\mu_t\right)^{\frac{n-2}{n}} =&\|f^{\frac{q}{2}}\eta\|^2_{\frac{2n}{n-2}}\\ \leq&\frac{4(n-1)^2(1+s)C^2(n)}{(n-2)^2}\|\nabla(f^{\frac{q}{2}}\eta)\|_2^2 \\ &+C_2C^2(n)\Big(1+\frac{1}{s}\Big)\|f^{\frac{q}{2}}\eta\|_2^2,\end{aligned} \tag{3.4}$$

其中C_2是依赖于n和$\sup_{(x,t)\in M\times[0,T_0]}|A|$的正常数. 由(3.3)和(3.4)我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{\tau'}^{T_0}\int_{B(R')} f^{q(1+\frac{2}{n})}\eta^{2+\frac{1}{n}}d\mu_t dt\\ \leq&\int_{\tau'}^{T_0}\left(\int_{B(R')} f^q\eta^2 d\mu_t\right)^{\frac{2}{n}}\left(\int_{B(R')} f^{\frac{nq}{n-2}}\eta^{\frac{2n}{n-2}}d\mu_t\right)^{\frac{n-2}{n}}dt\\ \leq&\max_{t\in[\tau',T_0]}\left(\int_{B(R')} f^q\eta^2 d\mu_t\right)^{\frac{2}{n}}\times\int_{\tau}^{T_0}\Big[\frac{4(n-1)^2(1+s)C^2(n)}{(n-2)^2}\|\nabla(f^{\frac{q}{2}}\eta)\|_2^2\\ &+C_2C^2(n)\Big(1+\frac{1}{s}\Big)\|f^{\frac{q}{2}}\eta\|_2^2\Big]dt\\ \leq&C_3\max_{t\in[\tau',T_0]}\left(\int_{B(R')} f^q\eta^2 d\mu_t\right)^{\frac{2}{n}}\times\int_{\tau}^{T_0}\Big[\|\nabla(f^{\frac{q}{2}}\eta)\|_2^2+\|f^{\frac{q}{2}}\eta\|_2^2\Big]dt\\ \leq&C_3\left[2\int_{\tau}^{T_0}\int_{B(R')}|\nabla\eta|^2 f^q d\mu_t dt+\Big(\beta q+\frac{1}{\tau'-\tau}\Big)\int_{\tau}^{T_0}\int_{B(R')} f^q\eta^2 d\mu_t dt\right]^{1+\frac{2}{n}},\end{aligned}$$

这里我们取自由参数$s=1$, C_3为依赖于n和$\sup_{(x,t)\in M\times[0,T_0]}|A|$的常数. 由于$|\nabla\eta|_{g(t)}\leq|\nabla\eta|^2_{g(0)}e^{lt}$, 其中$l=\max_{0\leq t\leq T_0}\|\frac{\partial g}{\partial t}\|_{g(t)}$, 因此

$$\begin{aligned}\int_{\tau}^{T_0}\int_{B(R')}|\nabla\eta|^2 f^q d\mu_t dt &\leq \int_{\tau}^{T_0}\int_{B(R')}|\nabla\eta|^2_{g(0)}e^{lt}f^q d\mu_t dt\\ &\leq \frac{e^{C_4T_0}}{(R'-R)^2}\int_{\tau}^{T_0}\int_{B(R')} f^q d\mu_t dt,\end{aligned}$$

其中C_4为依赖于n和$\sup_{(x,t)\in M\times[0,T_0]}|A|$的常数. 所以我们有

$$\begin{aligned}\int_{\tau}^{T_0}\int_{B(R)} f^{q(1+\frac{2}{n})}d\mu_t dt \leq& C_3\left(\beta q+\frac{1}{\tau'-\tau}+\frac{2e^{C_4T_0}}{(R'-R)^2}\right)^{1+\frac{2}{n}}\\ &\times\left(\int_{\tau}^{T_0}\int_{B(R')} f^q d\mu_t dt\right)^{1+\frac{2}{n}}.\end{aligned}$$

令$L(q,t,R)=\int_t^{T_0}\int_{B(R)}f^q d\mu_t dt$, 则上面的不等式可改写为

$$L\Big(q\Big(1+\frac{2}{n}\Big),\tau',R\Big)\le C_3\left(\beta q+\frac{1}{\tau'-\tau}+\frac{2e^{C_4T_0}}{(R'-R)^2}\right)^{1+\frac{2}{n}}L(q,\tau,R')^{1+\frac{2}{n}}. \quad (3.5)$$

取

$$\mu=1+\frac{2}{n},\ q_k=\frac{n+2}{2}\mu^k,\ \tau_k=\Big(1-\frac{1}{\mu^{k+1}}\Big)t,\ R_k=\frac{R'}{2}\Big(1+\frac{1}{\mu^{k/2}}\Big),$$

由(3.5)式我们有

$$\begin{aligned}&L(q_{k+1},\tau_{k+1},R_{k+1})^{\frac{1}{q_{k+1}}}\\ \le&C_3^{\frac{1}{q_{k+1}}}\Big[\frac{(n+2)\beta}{2}+\frac{\mu^2}{\mu-1}\cdot\frac{1}{t}+\frac{8e^{C_4T_0}}{R'^2}\cdot\frac{\mu}{(\sqrt{\mu}-1)^2}\Big]^{\frac{1}{q_k}}\\ &\times\mu^{\frac{k}{q_k}}L(q_k,\tau_k,R_k)^{\frac{1}{q_k}}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&L(q_{m+1},\tau_{m+1},R_{m+1})^{\frac{1}{q_{m+1}}}\\ \le&C_3^{\sum_{k=0}^m\frac{1}{q_{k+1}}}\Big[\frac{(n+2)\beta}{2}+\frac{\mu^2}{\mu-1}\cdot\frac{1}{t}+\frac{8e^{C_4T_0}}{R'^2}\cdot\frac{\mu}{(\sqrt{\mu}-1)^2}\Big]^{\sum_{k=0}^m\frac{1}{q_k}}\\ &\times\mu^{\sum_{k=0}^m\frac{k}{q_k}}L(q_0,\tau_0,R_0)^{\frac{1}{q_0}}.\end{aligned}$$

令$m\to+\infty$, 我们得到

$$f(x,t)\le C_5^{\frac{n}{n+2}}\Big(C_5+\frac{1}{t}+\frac{e^{C_4T_0}}{R'^2}\Big)\Big(1+\frac{2}{n}\Big)^{\frac{n}{2}}\Big(\int_0^{T_0}\int_{M_t}f^{\frac{n+2}{2}}d\mu_t dt\Big)^{\frac{2}{n+2}}, \quad (3.6)$$

其中C_5为依赖于n, $\sup_{M\times[0,T_0]}|A|^2$, K_1和K_2的正常数.

取充分小的R', 使得

$$K_2(n+1)^{\frac{2}{n}}(\omega_n^{-1}Vol_{g(0)}(B(R'))^{\frac{2}{n}}\le 1, \quad (3.7)$$

$$2K_2^{-\frac{1}{2}}\sin^{-1}K_2^{\frac{1}{2}}(n+1)^{\frac{1}{n}}(\omega_n^{-1}Vol_{g(0)}(B(R'))^{\frac{1}{n}}\le i_N. \quad (3.8)$$

对于度量$g(0)$, 存在依赖于n, $\max_{x\in M_0}|A|$, K_1和K_2的非正常数K, 使得M_0的截面曲率以K为下界. 由Bishop-Gromov体积比较定理, 我们有

$$Vol_{g(0)}(B(R'))\le Vol_K(B(R')),$$

其中$Vol_K(B(R'))$是具有常曲率K的n维完备单连通空间形式中半径为R'的球的体积. 令R'为满足以下两个不等式的最大值:

$$K_2(n+1)^{\frac{2}{n}}(\omega_n^{-1}Vol_K(B(R'))^{\frac{2}{n}} \le 1,$$

$$2K_2^{-\frac{1}{2}}\sin^{-1}K_2^{\frac{1}{2}}(n+1)^{\frac{1}{n}}(\omega_n^{-1}Vol_K(B(R'))^{\frac{1}{n}} \le i_N.$$

则R'仅依赖于n, K_1, K_2, i_N和$\sup_{M\times[0,T_0]}|A|^2$, 且$Vol_{g(0)}(B(R'))$满足不等式(3.7)和(3.8). 于是由(3.6)式我们得到

$$\max_{(x,t)\in M\times[\frac{T_0}{2},T_0]}|H|^2(x,t) \le C_1\left(\int_0^{T_0}\int_{M_t}|H|^{n+2}d\mu_t dt\right)^{\frac{2}{n+2}},$$

其中C_1为依赖于n, T_0, $\sup_{(x,t)\in M\times[0,T_0]}|A|$, K_1, K_2和i_N的正常数. 引理证毕.

3.3 全平均曲率有限的平均曲率流的可延拓性

本节我们完成定理3的证明.

定理3的证明. 根据Hölder不等式, 若$\alpha > n+2$, 则由$||H||_{\alpha,M\times[0,T)} < \infty$可以推出$||H||_{n+2,M\times[0,T)} < \infty$, 因此我们只需要证明当$\alpha = n+2$时定理成立.

我们采用反证法证明. 假设平均曲率流的解不能延拓到时间T之后, 则当$t\to T$时, $|A|\to+\infty$. 由定理3中的条件(1)可知, 此时也有$|H|^2\to+\infty$.

首先选取时间点列$t^{(i)}$, $i=1,2,\cdots$, 使得当$i\to\infty$时, $t^{(i)}\to T$. 选取M中的点列$x^{(i)}$, 满足

$$|H|^2(x^{(i)},t^{(i)}) = \max_{(x,t)\in M\times[0,t^{(i)}]}|H|^2(x,t).$$

令

$$Q^{(i)} = |H|^2(x^{(i)},t^{(i)}),$$

则$Q^{(i)}, i=1,2,\cdots$是非减的序列, 并且$\lim_{i\to\infty}Q^{(i)}=\infty$. 结合$\lim_{i\to\infty}t^{(i)}=T>0$可知, 存在正整数$i_0$, 使得对$i\ge i_0$, 有$Q^{(i)}t^{(i)}\ge 1$, 且$Q^{(i)}\ge 1$. 对于$i\ge i_0$和$t\in[0,1]$, 我们定义

$$F^{(i)}(t) = F\left(\frac{t-1}{Q^{(i)}}+t^{(i)}\right) : (M, g^{(i)}(t)) \to (N, Q^{(i)}h),$$

其中$g^{(i)}(t) = F^{(i)}(t)^*(Q^{(i)}h)$. 记$H_{(i)}$和$A^{(i)} = h^{(i)}_{jk}$分别为$F^{(i)}(t)$的平均曲率向量和第二基本形式, 则在$M \times [0,1]$上我们有

$$|H_{(i)}|^2(x,t) \le 1.$$

由上式以及定理3中的条件(1)可知, $|A^{(i)}| \le C_6$, 其中C_6是与i无关的常数. 由于(N,h)具有有界几何, 并且当$i \ge i_0$时$Q^{(i)} \ge 1$, 故而当$i \ge i_0$时, $(N, Q^{(i)}h)$也具有有界几何, 并且具有和(N,h)相同的上界和下界常数. 则由引理3.2可以推出, 当$i \ge i_0$时, 有

$$\max_{(x,t)\in M^{(i)}\times[\frac{1}{2},1]} |H_{(i)}|^2(x,t) \le C_7 \left(\int_0^1 \int_{M_t} |H_{(i)}|^{n+2} d\mu_{g^{(i)}(t)} dt\right)^{\frac{2}{n+2}},$$

其中C_7为与i无关的常数.

由[15]中的收敛性结果可知, 存在序列$F^{(i)}(t) : (M, g^{(i)}(t)) \to (N, Q^{(i)}h)$, $t \in [0,1]$的子序列, 它收敛到

$$\widetilde{F}(t) : (\widetilde{M}, \widetilde{g}(t), \widetilde{x}) \to R^{n+p},\ t \in [0,1].$$

记$\widetilde{H}$为$\widetilde{F}$的平均曲率向量. 由于$\int_0^T \int_{M_t} |H|^{n+2} d\mu_t dt < +\infty$, 并且$\lim_{i\to\infty}(Q^{(i)})^{-1} = 0$, 因此我们有

$$\begin{aligned}\max_{(x,t)\in \widetilde{M}\times[\frac{1}{2},1]} |\widetilde{H}|^2(x,t) &\le \lim_{i\to\infty} C_7 \left(\int_0^1 \int_{M_t} |H_{(i)}|^{n+2} d\mu_{g^{(i)}(t)} dt\right)^{\frac{2}{n+2}} \\ &\le \lim_{i\to\infty} C_7 \left(\int_{t^{(i)}}^{t^{(i)}+(Q^{(i)})^{-1}} \int_{M_t} |H_{(i)}|^{n+2} d\mu_t dt\right)^{\frac{2}{n+2}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

另一方面, 根据点列的选取方法可知

$$|\widetilde{H}|^2(\widetilde{x},1) = \lim_{i\to\infty} |H_{(i)}|^2(x^{(i)},1) = 1.$$

以上两式矛盾. 这就证明了定理3.

第四章 欧氏空间中超曲面平均曲率流的收敛性定理

收敛性是几何流研究的重要问题之一. 二十世纪八十年代, G. Huiken对超曲面的平均曲率流进行了系统的研究, 深入刻画了平均曲率流的性质. 他证明: 若对平均曲率流的初始超曲面附加适当的几何条件, 则平均曲率流在有限时间内收敛到一个圆点. 由于平均曲率流的发展是光滑的, 因此这一结果给出了超曲面的微分球面定理.

本章研究欧氏空间中超曲面平均曲率流的收敛性. 设(M,g)为n维紧致无边流形, $F_t : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$是一族光滑浸入到欧氏空间$\mathbb{R}^{n+1}$中的超曲面. 我们称$M_t = F_t(M)$为欧氏空间中超曲面平均曲率流的解, 如果$F_t$满足

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}F(x,t) &= -H(x,t)\nu(x,t), \\ F(x,0) &= F_0(x), \end{cases}$$

其中$F(x,t) = F_t(x)$, $H(x,t)$为超曲面$M_t = F_t(M)$在点x处的平均曲率, $\nu(x,t)$为单位外法向量, F_0为给定的初始超曲面.

本章应用第二章中平均曲率流解的延拓性定理, 证明欧氏空间中超曲面平均曲率流在曲率积分拼挤条件下的收敛性定理.

4.1 主要结果

上世纪八十年代, 在Huisken[33]获得了关于欧氏空间中超曲面平均曲率流收敛性的著名定理.

定理C.[33] *设M_0为欧氏空间$\mathbb{R}^{n+1}$中一致凸的$n(\geq 2)$维紧致超曲面, 即M_0的第二基本形式在每一点都是严格正的. 则以M_0为初始曲面的平均曲率流在有限时间$0 \leq t < T < \infty$上具有光滑解, 并且当$t \to T$时, $M_t = F_t(M)$收敛到一个圆点.*

我们将以上的逐点拼挤条件下超曲面平均曲率流的Huisken收敛性定理拓广为曲率积分拼挤条件下超曲面平均曲率流的收敛性定理. 设$\mathring{A}$为超曲面的无

迹第二基本形式, 我们得到了如下的结果.

定理4. 设$F_0: M^n \to \mathbb{R}^{n+1} (n \geq 3)$为光滑闭超曲面, 且在$M_0 = F_0(M)$上处处满足$H \neq 0$. 则对于某一固定的实数$p(> 1)$, 存在可用$n$, p, $\min_{M_0}|H|$和$||A||_{n+2}$显式表示的正常数C_1, 使得如果

$$||\mathring{A}||_p < C_1,$$

那么以F_0为初始超曲面的平均曲率流在有限的最大时间区间$[0, T)$上存在唯一的光滑解$F: M^n \times [0, T) \to \mathbb{R}^{n+1}$. 当$t \to T$时, F_t一致收敛到点$x \in \mathbb{R}^{n+1}$, 并且正规化的映射$\widetilde{F}_t = \frac{F_t - x}{\sqrt{2n(T-t)}}$在$C^\infty$意义下收敛到极限嵌入$\widetilde{F}_T$, 使得$\widetilde{F}_T(M)$为$\mathbb{R}^{n+1}$中的$n$维标准球面.

定理5. 设$F_0: M^n \to \mathbb{R}^{n+1} (n \geq 3)$为光滑闭超曲面, 且在$M_0 = F_0(M)$上处处满足$H \neq 0$. 则对于某一固定的实数$p(> n)$, 存在可用$n$, p, $\min_{M_0}|H|$和$||H||_{n+2}$显式表示的正常数C_2, 使得如果

$$||\mathring{A}||_p < C_2,$$

那么以F_0为初始超曲面的平均曲率流在有限的最大时间区间$[0, T)$上存在唯一的光滑解$F: M^n \times [0, T) \to \mathbb{R}^{n+1}$. 当$t \to T$时, F_t一致收敛到点$x \in \mathbb{R}^{n+1}$, 并且正规化的映射$\widetilde{F}_t = \frac{F_t - x}{\sqrt{2n(T-t)}}$在$C^\infty$意义下收敛到极限嵌入$\widetilde{F}_T$, 使得$\widetilde{F}_T(M)$为$\mathbb{R}^{n+1}$中的$n$维标准球面.

根据以上定理, 以及平均曲率流的光滑性质, 我们得到了下述的微分球面定理.

推论4.1. 设$F_0: M^n \to \mathbb{R}^{n+1} (n \geq 3)$为光滑闭超曲面, 且在$M_0 = F_0(M)$上处处满足$H \neq 0$. 则对于某一固定的实数$p(> 1)$, 存在可用$n$, p, $\min_{M_0}|H|$和$||A||_{n+2}$显式表示的正常数C_1, 使得如果

$$||\mathring{A}||_p < C_1,$$

那么M微分同胚于n维标准球面.

推论4.2. 设$F_0 : M^n \to \mathbb{R}^{n+1} (n \geq 3)$为光滑闭超曲面，且在$M_0 = F_0(M)$上处处满足$H \neq 0$. 则对于某一固定的实数$p(> n)$, 存在可用$n$, p, $\min_{M_0}|H|$和$\|H\|_{n+2}$显式表示的正常数C_2, 使得如果

$$\|\mathring{A}\|_p < C_2,$$

那么M微分同胚于n维标准球面.

4.2 准备工作

首先我们给出欧氏空间中超曲面平均曲率流的一些发展方程.

引理4.3.[20, 97] 对于欧氏空间中超曲面的平均曲率流, 有以下的发展方程

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2Hh_{ij}, \\
&\frac{\partial}{\partial t} d\mu_t = -H^2 d\mu_t, \\
&\frac{\partial}{\partial t} H = \Delta H + |A|^2 H, \\
&\frac{\partial}{\partial t} |A|^2 = \Delta |A|^2 - 2|\nabla A|^2 + 2|A|^4.
\end{aligned}$$

在定理的证明过程中, 我们需要以下的关于欧氏空间中超曲面的Sobolev不等式.

引理4.4.[40] 设M为$\mathbb{R}^{n+1}$中的紧致无边$n(\geq 3)$维超曲面. 则对M上所有的*Lipschitz*函数v, 有

$$\left(\int_M v^{\frac{2n}{n-2}} d\mu\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C_n \left(\int_M |\nabla v|^2 d\mu + \int_M |H|^{n+2} d\mu \int_M v^2 d\mu\right),$$

其中H表示M的平均曲率, $C_n = 2(2c(n))^{\frac{n^2+2n-2}{n-2}}$, 这里$c(n) = \frac{2^n(1+n)^{1+\frac{1}{n}}}{(n-1)\omega_n}$, ω_n表示$\mathbb{R}^{n+1}$中单位球的体积.

4.3 超曲面平均曲率流的收敛性

我们利用第二章中给出的平均曲率流解的延拓性定理来证明本章的收敛性定理.

定理4的证明. 记$\Lambda = \|A\|_{n+2}$. 假设以F_0为初始超曲面的平均曲率流解的最大存在时间为$T_{\max}$. 由[74]可知$T_{\max} < +\infty$.

对于任意给定的正数ε, 我们首先证明, 如果对某个$p > 1$

$$\left(\int_M |\mathring{A}|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \tag{4.1}$$

则平均曲率流解的最大存在时间$T_{\max} > T_0$, 其中T_0是某个依赖于n, p和Λ的正常数, 并且在$t \in [0, T_0]$上有$\|A(t)\|_{n+2} < 2\Lambda$, $\|\mathring{A}(t)\|_{n+2} < 2\varepsilon$.

记

$$T = \sup\left\{t \in [0, T_{\max}) : \int_{M_t} |A|^{n+2} d\mu_t < (2\Lambda)^{n+2}, \int_{M_t} |\mathring{A}|^p d\mu_t < (2\varepsilon)^p\right\}.$$

考虑时间区间$[0, T)$上的平均曲率流. 由$|A|^2$的发展方程可知

$$\frac{\partial}{\partial t}|A|^2 \le \Delta |A|^2 + 2|A|^4.$$

令$u = |A|^2$, 则有

$$\frac{\partial}{\partial t}u \le \Delta u + 2u^2. \tag{4.2}$$

由(4.2)和体积元的发展方程可知, 对任意的$p_0 > \frac{n}{2}$, 有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t} u^{p_0} d\mu_t &= \int_{M_t} p_0 u^{p_0-1}\frac{\partial}{\partial t}u d\mu_t + \int_{M_t} u^{p_0}\frac{\partial}{\partial t}d\mu_t \\
&= p_0 \int_{M_t} u^{p_0-1}(\Delta u + 2u^2 d\mu_t) - \int_{M_t} H^2 u^{p_0} d\mu_t \\
&\le -\frac{4(p_0-1)}{p_0}\int_{M_t} |\nabla u^{\frac{p_0}{2}}|^2 d\mu_t + 2p_0 \int_{M_t} u^{p_0+1} d\mu_t. \\
&\le -\frac{4}{3}\int_{M_t} |\nabla u^{\frac{p_0}{2}}|^2 d\mu_t + 2p_0 \int_{M_t} u^{p_0+1} d\mu_t.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

令$p_0 = \frac{n+2}{2}$, 则(4.3)化简为

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t} u^{\frac{n+2}{2}} d\mu_t \le -\frac{4}{3}\int_{M_t} |\nabla u^{\frac{n+2}{4}}|^2 d\mu_t + (n+2)\int_{M_t} u^{\frac{n+2}{2}+1} d\mu_t. \tag{4.4}$$

对于(4.4)中右边的第二项, 根据Hölder不等式有

$$
\begin{aligned}
\int_{M_t} u^{\frac{n+2}{2}+1} d\mu_t \leq & \left(\int_{M_t} u^{\frac{n+2}{2}} d\mu_t\right)^{\frac{2}{n+2}} \cdot \left(\int_{M_t} (u^{\frac{n+2}{2}})^{\frac{n+2}{n}} d\mu_t\right)^{\frac{n}{n+2}} \\
\leq & \left(\int_{M_t} u^{\frac{n+2}{2}} d\mu_t\right)^{\frac{2}{n+2}} \cdot \left(\int_{M_t} u^{\frac{n+2}{2}} d\mu_t\right)^{\frac{2}{n+2}} \cdot \left(\int_{M_t} (u^{\frac{n+2}{4}})^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_t\right)^{\frac{n-2}{n+2}} \\
\leq & \left(\int_{M_t} u^{\frac{n+2}{2}} d\mu_t\right)^{\frac{2}{n+2}} \cdot \left(\int_{M_t} u^{\frac{n+2}{2}} d\mu_t\right)^{\frac{2}{2+2}} \\
& \times \left[C_n\left(\int_{M_t} |\nabla u^{\frac{n+2}{4}}|^2 d\mu_t + \int_{M_t} |H|^{n+2} d\mu_t \int_{M_t} u^{\frac{n+2}{2}} d\mu_t\right)\right]^{\frac{n}{n+2}}.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

记$\varphi(t) = \int_{M_t} u^{\frac{n+2}{2}} d\mu_t$. 由于$|A|^2 \geq \frac{H^2}{n}$, 对(4.5)应用Young不等式可得

$$
\begin{aligned}
\int_{M_t} u^{\frac{n+2}{2}+1} d\mu_t \leq & \varphi^{\frac{4}{n+2}} \left[C_n\left(\int_{M_t} |\nabla u^{\frac{n+2}{4}}|^2 d\mu_t + n^{\frac{n+2}{2}} (2\Lambda)^{n+2} \varphi^2\right)\right]^{\frac{n}{n+2}} \\
\leq & C_n^{\frac{n}{n+2}} \varphi^{\frac{4}{n+2}} \left[\left(\int_{M_t} |\nabla u^{\frac{n+2}{4}}|^2 d\mu_t\right)^{\frac{n}{n+2}} + n^{\frac{n}{2}} (2\Lambda)^n \varphi^{\frac{2n}{n+2}}\right] \\
= & C_n^{\frac{n}{n+2}} n^{\frac{n}{2}} (2\Lambda)^n \varphi^2 + C_n^{\frac{n}{n+2}} \varphi^{\frac{4}{n+2}} \left(\int_{M_t} |\nabla u^{\frac{n+2}{4}}|^2 d\mu_t\right)^{\frac{n}{n+2}} \\
\leq & C_n^{\frac{n}{n+2}} n^{\frac{n}{2}} (2\Lambda)^n \varphi^2 + C_n^{\frac{n}{n+2}} \left[\frac{2}{n+2} \epsilon^{\frac{n+2}{2}} \varphi^2 \right. \\
& \left. + \frac{n}{n+2} \epsilon^{-\frac{n+2}{n}} \int_{M_t} |\nabla u^{\frac{n+2}{4}}|^2 d\mu_t\right] \\
= & C_n^{\frac{n}{n+2}} n^{\frac{n}{2}} (2\Lambda)^n \varphi^2 + C_n^{\frac{n}{n+2}} \frac{2}{n+2} \epsilon^{\frac{n+2}{2}} \varphi^2 \\
& + C_n^{\frac{n}{n+2}} \frac{n}{n+2} \epsilon^{-\frac{n+2}{n}} \int_{M_t} |\nabla u^{\frac{n+2}{4}}|^2 d\mu_t.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

将(4.6)代入(4.4), 得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \varphi \leq & -\frac{4}{3} \int_{M_t} |\nabla u^{\frac{n+2}{4}}|^2 d\mu_t + (n+2)(2\Lambda)^n C_n^{\frac{n}{n+2}} n^{\frac{n}{2}} \varphi^2 \\
& + 2C_n^{\frac{n}{n+2}} \epsilon^{\frac{n+2}{2}} \varphi^2 + nC_n^{\frac{n}{n+2}} \epsilon^{-\frac{n+2}{n}} \int_{M_t} |\nabla u^{\frac{n+2}{4}}|^2 d\mu_t.
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

取$\epsilon = \left(\frac{3n}{4}\right)^{\frac{n}{n+2}} C_n^{\frac{n^2}{(n+2)^2}}$, 则(4.7)中$\int_{M_t} |\nabla u^{\frac{n+2}{4}}|^2 d\mu_t$项的系数为0, 由此得到

$$
\frac{\partial}{\partial t} \varphi \leq C_5 \varphi^2,
$$

其中常数$C_5 = C_n^{\frac{n}{n+2}}\Big((n+2)n^{\frac{n}{2}}(2\Lambda)^n + 2\Big(\frac{3n}{4}\Big)^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n^2}{2(n+2)}}\Big)$. 由极大值原理, 存在只与$n$和$\Lambda$相关的正常数$T_1 = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}}{C_5\Lambda^{n+2}}$, 使得当$t\in[0,\min\{T,T_1\})$时, 有

$$\varphi(t) = \int_{M_t} |A|^{n+2} d\mu_t < \Big(\frac{3}{2}\Lambda\Big)^{n+2}. \tag{4.8}$$

考虑$|\mathring{A}|^2$的发展方程

$$\frac{\partial}{\partial t}|\mathring{A}|^2 = \Delta|\mathring{A}|^2 - 2|\nabla\mathring{A}|^2 + 2|A|^2|\mathring{A}|^2. \tag{4.9}$$

定义张量$\tilde{\mathring{A}}$为$\tilde{\mathring{A}}_{ij}^{\alpha} = \mathring{A}_{ij}^{\alpha} + \sigma\eta^{\alpha} g_{ij}$, 这里$\eta^{\alpha} = 1$. 令$h_{\sigma} = |\tilde{\mathring{A}}| = (|\mathring{A}|^2 + nd\sigma^2)^{\frac{1}{2}}$. 则由(4.9)可知

$$\frac{\partial}{\partial t}h_{\sigma} \le \Delta h_{\sigma} + 2|A|^2 h_{\sigma}. \tag{4.10}$$

对任意的$r\ge p$, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t} h_{\sigma}^r d\mu_t &= \int_{M_t} h_{\sigma}^{r-1}\frac{\partial}{\partial t}h_{\sigma} d\mu_t + \frac{1}{r}\int_{M_t} h_{\sigma}^p \frac{\partial}{\partial t} d\mu_t \\ &\le -\frac{4(r-1)}{r^2}\int_{M_t}|\nabla h_{\sigma}^{\frac{r}{2}}|^2 d\mu_t + 2\int_{M_t}|A|^2 h_{\sigma}^r d\mu_t.\end{aligned} \tag{4.11}$$

由T的定义可知, 在$[0,T)$上有

$$\int_{M_t}|A|^{n+2} d\mu_t < (2\Lambda)^{n+2}.$$

利用引理4.4, 对于Lipschitz函数v有

$$\Big(\int_M v^{\frac{2n}{n-2}} d\mu\Big)^{\frac{n-2}{n}} \le C_n\Big(\int_M|\nabla v|^2 d\mu + (2\sqrt{n}\Lambda)^{n+2}\int_M v^2 d\mu\Big). \tag{4.12}$$

于是对(4.11)右边第二项, 有如下估计

$$
\begin{aligned}
\int_{M_t}|A|^2h_\sigma^r d\mu_t \leq & \left(\int_{M_t}|A|^{n+2}d\mu_t\right)^{\frac{2}{n+2}}\left(\int_{M_t}h_\sigma^{r\cdot\frac{n+2}{n}}d\mu_t\right)^{\frac{n}{n+2}}\\
\leq & 4\Lambda^2\left(\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t\right)^{\frac{2}{n+2}}\left(\int_{M_t}(h_\sigma^r)^{\frac{n}{n-2}}d\mu_t\right)^{\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n}{n+2}}\\
\leq & 4\Lambda^2\left(\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t\right)^{\frac{2}{n+2}}\Bigg[C_n\bigg(\int_{M_t}|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2d\mu_t\\
& + (2\sqrt{n}\Lambda)^{n+2}\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t\bigg)\Bigg]^{\frac{n}{n+2}}\\
\leq & 4\Lambda^2\left(\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t\right)^{\frac{2}{n+2}}\Bigg[C_n^{\frac{n}{n+2}}\left(\int_{M_t}|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2d\mu_t\right)^{\frac{n}{n+2}}\\
& + (2\sqrt{n}\Lambda)^{n}C_n^{\frac{n}{n+2}}\left(\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t\right)^{\frac{n}{n+2}}\Bigg]\\
\leq & C_6\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t + C_6\left(\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t\right)^{\frac{2}{n+2}}\left(\int_{M_t}|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2d\mu_t\right)^{\frac{n}{n+2}}\\
\leq & C_6\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t + C_6\epsilon^{\frac{n+2}{2}}\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t + C_6\epsilon^{-\frac{n+2}{n}}\int_{M_t}|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2d\mu_t,
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

这里$\epsilon > 0$, $C_6 = C_n^{\frac{n}{n+2}}\cdot\max\{(2\Lambda)^{n+2}n^{\frac{n}{2}}, \frac{n}{n+2}(2\Lambda)^2\}$是只与$n$和$\Lambda$相关的常数. 由(4.11) 和(4.13) 得到

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t \leq & \left(2C_6\epsilon^{-\frac{n+2}{n}} - \frac{4(r-1)}{r^2}\right)\int_{M_t}|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2d\mu_t\\
& + 2C_6(1+\epsilon^{\frac{n+2}{2}})\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t.
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

在(4.14)中取$\epsilon = (C_6\cdot\frac{r^2}{r-1})^{\frac{n}{n+2}}$. 由于$r\geq p$, 故有

$$
\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t + \left(2-\frac{2}{p}\right)\int_{M_t}|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2d\mu_t \leq C_7r^{1+n}\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t, \tag{4.15}
$$

这里$C_7 = 2C_6(1+(\frac{C_6}{p-1})^{\frac{n}{2}})$. 令$r=p$, 则有

$$
\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t}h_\sigma^p d\mu_t \leq C_8\int_{M_t}h_\sigma^p d\mu_t, \tag{4.16}
$$

其中$C_8 = C_7 p^{1+n}$. 令$\sigma \to 0$, 由极大值原理, 存在依赖于n, p和Λ的常数$T_2 = \frac{p \ln \frac{3}{2}}{C_8}$, 使得当$t \in [0, \min\{T, T_2\})$时, 有

$$\int_{M_t} |\mathring{A}|^p d\mu_t < \left(\frac{3}{2}\varepsilon\right)^p. \tag{4.17}$$

令$T_0 = \min\{T_1, T_2\}$. 以下我们证明$T > T_0$. 我们采用反证法, 假设$T \le T_0$.

(i) 若$T < T_{\max}$, 则(4.8)和(4.17)在$[0, T)$上成立. 由平均曲率流的光滑性可知, 存在正常数θ, 使得在$[0, T+\theta)$上有

$$\int_{M_t} |A|^{n+2} d\mu_t < \left(\frac{5}{3}\Lambda\right)^{n+2}, \quad \int_{M_t} |\mathring{A}|^p d\mu_t < \left(\frac{5}{3}\varepsilon\right)^p.$$

这与T的定义相矛盾.

(ii) 若$T = T_{\max}$, 我们来证明平均曲率流可以延拓到时间$T_{\max}$之后, 从而得到矛盾. 对任意满足$0 < \tau < \tau' < T_{\max} - \theta$的$\tau$和$\tau'$, 以及任意的$t \in [\tau', T_{\max} - \theta]$, 这里$\theta$为正常数, 对(4.15)积分可得

$$\begin{aligned} \int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t \ &+ \ \left(2 - \frac{2}{p}\right) \int_{\tau'}^t \int_{M_t} |\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2 d\mu_t dt \\ &\le \ \left(C_7 r^{1+n} + \frac{1}{\tau' - \tau}\right) \int_\tau^{T_{\max}-\theta} \int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t dt. \end{aligned} \tag{4.18}$$

对(4.18)右边第二项应用Sobolev不等式(4.12), 得到

$$\begin{aligned} &\int_{\tau'}^{T_{\max}-\theta} \int_{M_t} h_\sigma^{r(1+\frac{2}{n})} d\mu_t dt \\ \le &\int_{\tau'}^{T_{\max}-\theta} \left(\int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t\right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_{M_t} h_\sigma^{\frac{nr}{n-2}} d\mu_t\right)^{\frac{n-2}{n}} dt \\ \le &\max_{t \in [\tau', T_{\max}-\theta]} \left(\int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t\right)^{\frac{2}{n}} \int_{\tau'}^{T_{\max}-\theta} \left(\int_{M_t} h_\sigma^{\frac{nr}{n-2}} d\mu_t\right)^{\frac{n-2}{n}} dt \\ \le &C_n^{\frac{n-2}{n}} \max_{t \in [\tau', T_{\max}-\theta]} \left(\int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t\right)^{\frac{2}{n}} \\ &\times \int_{\tau'}^{T_{\max}-\theta} \left(\int_{M_t} |\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2 d\mu_t + (2\sqrt{n}\Lambda)^{n+2} \int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t\right) dt. \end{aligned} \tag{4.19}$$

由(4.18)和(4.19)我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\tau'}^{T_{\max}-\theta}\int_{M_t} h_\sigma^{r(1+\frac{2}{n})} d\mu_t dt \le & C_9\Big(C_7 r^{1+n}+\frac{1}{\tau'-\tau}\Big)^{1+\frac{2}{n}} \\ & \times\Big(\int_{\tau}^{T_{\max}-\theta}\int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t dt\Big)^{1+\frac{2}{n}},\end{aligned} \tag{4.20}$$

其中$C_9 = C_n^{\frac{n-2}{n}}\cdot\max\{\frac{p}{p-1},(2\sqrt{n}\Lambda)^{n+2}T_0\}$. 以下对(4.20)进行Moser迭代. 令

$$J(r,t)=\int_t^{T_{\max}-\theta}\int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t dt.$$

则由(4.20)可得

$$J\Big(r\Big(1+\frac{2}{n}\Big),\tau'\Big)\le C_9\Big(C_7 r^{1+n}+\frac{1}{\tau'-\tau}\Big)^{1+\frac{2}{n}} J(r,\tau)^{1+\frac{2}{n}}. \tag{4.21}$$

令

$$\mu=1+\frac{2}{n},\quad r_k=p\mu^k,\quad \tau_k=\Big(1-\frac{1}{\mu^{k+1}}\Big)t.$$

由(4.21)得到

$$J(r_{k+1},\tau_{k+1})^{\frac{1}{r_{k+1}}}\le C_9^{\frac{1}{r_{k+1}}}\Big(C_7\cdot p^{1+n}+\frac{\mu^2}{\mu-1}\cdot\frac{1}{t}\Big)^{\frac{1}{r_k}}\mu^{\frac{k}{r_k}\cdot(1+n)}J(r_k,\tau_k)^{\frac{1}{r_k}}.$$

因此

$$\begin{aligned}J(r_{m+1},\tau_{m+1})^{\frac{1}{r_{m+1}}}\le & C_9^{\sum_{k=0}^m\frac{1}{r_{k+1}}}\Big(C_7\cdot p^{1+n}+\frac{\mu^2}{\mu-1}\cdot\frac{1}{t}\Big)^{\sum_{k=0}^m\frac{1}{r_k}} \\ & \cdot\mu^{(1+n)\cdot\sum_{k=0}^m\frac{k}{r_k}}J(p,t)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

令$m\to+\infty$, 我们得到

$$\begin{aligned}h_\sigma(x,t) \;\le\; & \Big(1+\frac{2}{n}\Big)^{\frac{n(n+1)(n+2)}{4p}} C_9^{\frac{n}{2p}}\Big(C_7\cdot p^{1+n}+\frac{(n+2)^2}{2nt}\Big)^{\frac{n+2}{2p}} \\ & \times\Big(\int_0^{T_{\max}-\theta}\int_{M_t} h_\sigma^p d\mu_t dt\Big)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

令$\sigma\to 0$, $\theta\to 0$, 则对$t\in[\frac{T_{\max}}{2},T_{\max})$, 有

$$|\mathring{A}|^2(x,t)\le C(n,p,\Lambda,\varepsilon,T_{\max})<+\infty.$$

这表明在时间区间$[0,T_{\max})$上, 存在与时间t无关的正常数a和b, 使得

$$|A|^2\le a|H|^2+b.$$

另一方面, 由于$T_{\max}<+\infty$, 我们有

$$\int_0^{T_{\max}}\int_{M_t}|H|^{n+2}d\mu_t dt<+\infty.$$

应用第二章的延拓性定理可知, 平均曲率流可以延拓到时间$T_{\max}$之后. 这与$T_{\max}$的定义矛盾, 于是便证明了$T>T_0$的论断.

由于$T>T_0$, 我们考虑$[\frac{T_0}{2},T_0]$上的平均曲率流. 注意到T_0与ε无关, 通过与以上类似的Moser迭代, 我们得到

$$\begin{aligned}|\mathring{A}|^2(x,T_0) &\le \left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n(n+1)(n+2)}{2p}}C_9^{\frac{n}{p}}\left(C_7\cdot p^{1+n}+\frac{(n+2)^2}{nT_0}\right)^{\frac{n+2}{p}}\\ &\quad\times\left(\int_0^{T_0}\int_{M_t}|\mathring{A}|^p d\mu_t dt\right)^{\frac{2}{p}}\\ &\le C_{10}\varepsilon^2,\end{aligned}\tag{4.22}$$

其中$C_{10}=4\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n(n+1)(n+2)}{2p}}C_9^{\frac{n}{p}}\left(C_7\cdot p^{1+n}+\frac{(n+2)^2}{nT_0}\right)^{\frac{n+2}{p}}T_0^{\frac{2}{p}}$是依赖于$n$, p和Λ的正常数. 根据$|H|$的发展方程, $|H|(0)\ge\min_{M_0}|H|$沿平均曲率流是保持的, 即在$t\in[0,T_{\max})$上, 有$|H|(t)\ge\min_{M_0}|H|$. 因此在(4.22)中取$\varepsilon=\left(\frac{\min_{M_0}|H|^2}{n(n-1)C_{10}}\right)^{\frac{1}{2}}$, 得到

$$|A|^2(x,T_0)\le\frac{|H|^2(x,T_0)}{n-1}.$$

这表明超曲面M_{T_0}是凸的. 于是由[33]中的收敛性定理和平均曲率流解的唯一性可知, 定理4中所述的平均曲率流收敛到$\mathbb{R}^{n+1}$中的一个圆点, 正规化的平均曲率流收敛到$\mathbb{R}^{n+1}$中的球面. 定理证毕.

采用类似的想法, 我们证明定理5.

定理5的证明. 记$\Lambda=\|H\|_{n+2}$. 假设以F_0为初始超曲面的平均曲率流解的最大存在时间为$T_{\max}$. 由[74]可知$T_{\max}<+\infty$. 假设对某个$p>n$,

$$\int_M|\mathring{A}|^p d\mu<\varepsilon^p,$$

这里$\varepsilon \in (0,100]$. 令

$$T' = \sup\{t \in [0, T_{\max}) : \int_{M_t} |H|^{n+2} d\mu_t < (2\Lambda)^{n+2}, \int_{M_t} |\mathring{A}|^p d\mu_t < (2\varepsilon)^p\}.$$

考虑$[0,T')$上的平均曲率流.

根据H的发展方程, 由$H(0) \geq \min_{M_0}|H|$可知, 在$t \in [0,T')$ 上有$H(t) \geq \min_{M_0}|H|$. 对于H^2的发展方程

$$\frac{\partial}{\partial t}|H|^2 = \Delta|H|^2 - 2|\nabla H|^2 + 2|A|^2|H|^2,$$

令$f = |H|^2$, 则有

$$\frac{\partial}{\partial t} f \leq \Delta f + 2|\mathring{A}|^2 f + \frac{2}{n} f^2. \tag{4.23}$$

由(4.23)可知, 对任意的$p_0 > 1$有

$$\begin{aligned}\frac{1}{p_0}\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t} f^{p_0} d\mu_t \leq& -\frac{4(p_0-1)}{p_0^2}\int_{M_t} |\nabla f^{\frac{p_0}{2}}|^2 d\mu_t \\ &+ n^2 \int_{M_t} |\mathring{A}|^2 f^{p_0} d\mu_t + n\int_{M_t} f^{p_0+1} d\mu.\end{aligned} \tag{4.24}$$

令$p_0 = \frac{n+2}{2}$, 则(4.24)化简为

$$\begin{aligned}\frac{2}{n+2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t} f^{\frac{n+2}{2}} d\mu_t \leq& -\frac{8n}{(n+2)^2}\int_{M_t} |\nabla f^{\frac{n+2}{4}}|^2 d\mu_t \\ &+ n^2 \int_{M_t} |\mathring{A}|^2 f^{\frac{n+2}{2}} d\mu_t + n\int_{M_t} f^{\frac{n+2}{2}+1} d\mu.\end{aligned} \tag{4.25}$$

记$\rho(t) = \int_{M_t} f^{\frac{n+2}{2}} d\mu_t$, 则由Hölder不等式得到

$$\begin{aligned}\int_{M_t} f^{\frac{n+2}{2}+1} d\mu_t \leq& C_n^{\frac{n}{n+2}} (2\Lambda)^n \rho^2 + C_n^{\frac{n}{n+2}} \frac{2}{n+2} \epsilon^{\frac{n+2}{2}} \rho^2 \\ &+ C_n^{\frac{n}{n+2}} \frac{n}{n+2} \epsilon^{-\frac{n+2}{n}} \int_{M_t} |\nabla f^{\frac{n+2}{4}}|^2 d\mu_t.\end{aligned} \tag{4.26}$$

由于$p > n$, 因此根据引理4.4和Young不等式, 得到

$$
\begin{aligned}
\int_{M_t}|\mathring{A}|^2 f^{\frac{n+2}{2}}d\mu_t \leq&\left(\int_{M_t}|\mathring{A}|^p d\mu_t\right)^{\frac{2}{p}}\left(\int_{M_t} f^{\frac{n+2}{2}\cdot\frac{p}{p-2}}d\mu_t\right)^{\frac{p-2}{p}}\\
\leq&(2\varepsilon)^2\left(\int_{M_t} f^{\frac{n+2}{2}}d\mu_t\right)^{1-\frac{n}{p}}\left(\int_{M_t} f^{\frac{n+2}{2}\cdot\frac{n}{n-2}}d\mu_t\right)^{\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n}{p}}\\
\leq&(2\varepsilon)^2\left(\int_{M_t} f^{\frac{n+2}{2}}d\mu_t\right)^{1-\frac{n}{p}}\\
&\times\left[C_n\left(\int_{M_t}|\nabla f^{\frac{n+2}{4}}|^2 d\mu_t+(2\Lambda)^{n+2}\int_{M_t} f^{\frac{n+2}{2}}d\mu_t\right)\right]^{\frac{n}{p}}\\
\leq&(2\varepsilon)^2 C_n^{\frac{n}{p}}\left(\int_{M_t} f^{\frac{n+2}{2}}d\mu_t\right)^{1-\frac{n}{p}}\\
&\times\left[\left(\int_{M_t}|\nabla f^{\frac{n+2}{4}}|^2 d\mu_t\right)^{\frac{n}{p}}+(2\Lambda)^{\frac{n(n+2)}{p}}\left(\int_{M_t} f^{\frac{n+2}{2}}d\mu_t\right)^{\frac{n}{p}}\right]\\
\leq&(2\varepsilon)^2 C_n^{\frac{n}{p}}(2\Lambda)^{\frac{n(n+2)}{p}}\rho\\
&+(2\varepsilon)^2 C_n^{\frac{n}{p}}\left[\frac{p-n}{p}\gamma^{\frac{p}{p-n}}\rho+\frac{n}{p}\gamma^{-\frac{p}{n}}\left(\int_{M_t}|\nabla f^{\frac{n+2}{4}}|^2 d\mu_t\right)\right]\\
=&\left((2\varepsilon)^2 C_n^{\frac{n}{p}}(2\Lambda)^{\frac{n(n+2)}{p}}+(2\varepsilon)^2 C_n^{\frac{n}{p}}\frac{p-n}{p}\gamma^{\frac{p}{p-n}}\right)\rho\\
&+(2\varepsilon)^2 C_n^{\frac{n}{p}}\frac{n}{p}\gamma^{-\frac{p}{n}}\left(\int_{M_t}|\nabla f^{\frac{n+2}{4}}|^2 d\mu_t\right).
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

由于我们假设$\varepsilon \leq 100$, 因此将(4.26)和(4.27)代入(4.25)得到

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{n+2}\frac{\partial}{\partial t}\rho \leq&-\frac{8n}{(n+2)^2}\int_{M_t}|\nabla f^{\frac{n+2}{4}}|^2 d\mu_t\\
&+nC_n^{\frac{n}{n+2}}\left((2\Lambda)^n+\frac{2}{n+2}\epsilon^{\frac{n+2}{2}}\right)\rho^2\\
&+\frac{n^2}{n+2}C_n^{\frac{n}{n+2}}\epsilon^{-\frac{n+2}{n}}\int_{M_t}|\nabla f^{\frac{n+2}{4}}|^2 d\mu_t\\
&+n^2\left((200)^2 C_n^{\frac{n}{p}}(2\Lambda)^{\frac{n(n+2)}{p}}+(200)^2 C_n^{\frac{n}{p}}\frac{p-n}{p}\gamma^{\frac{p}{p-n}}\right)\rho\\
&+(200)^2 C_n^{\frac{n}{p}}\frac{n^3}{p}\gamma^{-\frac{p}{n}}\left(\int_{M_t}|\nabla f^{\frac{n+2}{4}}|^2 d\mu_t\right).
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

在(4.28)中取$\epsilon=\left(\frac{n(n+2)}{4}C_n^{\frac{n}{n+2}}\right)^{\frac{n}{n+2}}$, $\gamma=\left(\frac{(100n)^2(n+2)^2}{p}C_n^{\frac{n}{p}}\right)^{\frac{n}{p}}$, 则$\int_{M_t}|\nabla f^{\frac{2p}{2}}|^2 d\mu_t$的

系数为0. 于是由(4.28)得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho \le C_{11}\rho^2 + C_{12}\rho,$$

这里

$$C_{11} = nC_n^{\frac{n}{n+2}}\left[\frac{n+2}{2}\cdot(2\Lambda)^n + \left(\frac{n(n+2)}{4}C_n^{\frac{n}{n+2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right],$$

$$C_{12} = \frac{(200)^2(n+2)n^2}{2}C_n^{\frac{n}{p}}\left[(2\Lambda)^{\frac{n(n+2)}{p}} + \frac{p-n}{p}\left(\frac{(100)^2(n+2)^2}{p}C_n^{\frac{n}{p}}\right)^{\frac{n}{p-n}}\right].$$

根据极大值原理, 存在依赖于n, p和Λ的正常数$T_1' = \frac{1}{C_{12}}\ln\left(\frac{1+\frac{C_{11}}{C_{12}}\Lambda^{n+2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}+\frac{C_{11}}{C_{12}}\Lambda^{n+2}}\right)$, 使得在$t \in [0, \min\{T', T_1'\})$上有

$$\int_{M_t}|H|^{n+2}d\mu_t < \left(\frac{3\Lambda}{2}\right)^{n+2}. \tag{4.29}$$

根据$|\mathring{A}|^2$的发展方程(4.9), 我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}h_\sigma \le \Delta h_\sigma + 2|\mathring{A}|^2 h_\sigma + \frac{2}{n}|H|^2 h_\sigma. \tag{4.30}$$

由(4.30)可知, 对于$r \ge p$, 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t \le& -\frac{4(r-1)}{r^2}\int_{M_t}|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2 d\mu_t\\ &+ 2\int_{M_t}|\mathring{A}|^2 h_\sigma^r d\mu_t + \frac{2}{n}\int_{M_t}|H|^2 h_\sigma^r d\mu_t.\end{aligned} \tag{4.31}$$

对于(4.31)右边的第二和第三项, 当$p > n$时分别有

$$\begin{aligned}\int_{M_t}|\mathring{A}|^2 h_\sigma^r d\mu_t \le& \left((2\varepsilon)^2 C_n^{\frac{n}{p}}(2\Lambda)^{\frac{n(n+2)}{p}} + (2\varepsilon)^2 C_n^{\frac{n}{p}}\frac{p-n}{p}\epsilon^{\frac{p}{p-n}}\right)\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t\\ &+ (2\varepsilon)^2 C_n^{\frac{n}{p}}\frac{n}{p}\epsilon^{-\frac{p}{n}}\left(\int_{M_t}|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2 d\mu_t\right)\end{aligned} \tag{4.32}$$

和

$$
\begin{aligned}
\int_{M_t}|H|^2h_\sigma^r d\mu_t \le & \Big(\int_{M_t}|H|^{n+2}d\mu_t\Big)^{\frac{2}{n+2}}\Big(\int_{M_t}h_\sigma^{r\cdot\frac{n+2}{n}}d\mu_t\Big)^{\frac{n}{n+2}} \\
\le & 4\Lambda^2\Big(\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t\Big)^{\frac{2}{n+2}}\Big(\int_{M_t}(h_\sigma^r)^{\frac{n}{n-2}}d\mu_t\Big)^{\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n}{n+2}} \\
\le & 4\Lambda^2\Big(\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t\Big)^{\frac{2}{n+2}}\Big[C_n\Big(\int_{M_t}|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2d\mu_t \\
& +(2\Lambda)^{n+2}\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t\Big)\Big]^{\frac{n}{n+2}} \\
\le & 4\Lambda^2\Big(\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t\Big)^{\frac{2}{n+2}}\Big[C_n^{\frac{n}{n+2}}\Big(\int_{M_t}|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2d\mu_t\Big)^{\frac{n}{n+2}} \\
& +(2\Lambda)^n C_n^{\frac{n}{n+2}}\Big(\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t\Big)^{\frac{n}{n+2}}\Big] \\
\le & C_{13}(1+\gamma^{\frac{n+2}{2}})\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t+C_{13}\gamma^{-\frac{n+2}{n}}\int_{M_t}|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2d\mu_t,
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

其中$C_{13}=C_n^{\frac{n}{n+2}}\cdot\max\{(2\Lambda)^{n+2},\frac{n}{n+2}(2\Lambda)^2\}$.

由于我们假设$\epsilon\le 100$, 故由(4.31), (4.32)和(4.33)我们得到

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t\le & -\frac{4(r-1)}{r^2}\int_{M_t}|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2d\mu_t \\
& +2\Big[\Big((200)^2C_n^{\frac{n}{p}}(2\Lambda)^{\frac{n(n+2)}{p}}+(200)^2C_n^{\frac{n}{p}}\frac{p-n}{p}\epsilon^{\frac{p}{p-n}}\Big)\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t \\
& +(200)^2C_n^{\frac{n}{p}}\frac{n}{p}\epsilon^{-\frac{p}{n}}\Big(\int_{M_t}|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2d\mu_t\Big)\Big] \\
& +\frac{2}{n}\Big[C_{13}(1+\gamma^{\frac{n+2}{2}})\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t+C_{13}\gamma^{-\frac{n+2}{n}}\int_{M_t}|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2d\mu_t\Big].
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

取$\epsilon=\big(\frac{2nr^2}{p(r-1)}(200)^2C_n^{\frac{n}{p}}\big)^{\frac{n}{p}}$和$\gamma=\big(\frac{2r^2}{n(r-1)}C_{13}\big)^{\frac{n}{n+2}}$, 则$\int_{M_t}|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2d\mu_t$的系数为$-\frac{2(r-1)}{r^2}$.

而$-\frac{2(r-1)}{r^2} \le -\frac{2(p-1)}{pr}$, 故有

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t + \frac{2(p-1)}{p}\int_{M_t} |\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2 d\mu_t \\
\le & r\Bigg[2(200)^2 C_n^{\frac{n}{p}}\left((2\Lambda)^{\frac{n(n+2)}{p}} + \frac{p-n}{p}\left(\frac{2nr^2}{p(r-1)}(200)^2 C_n^{\frac{n}{p}}\right)^{\frac{n}{p-n}}\right) \\
& + \frac{2}{n}C_{13}\left(1+\left(\frac{2r^2}{n(r-1)}C_{13}\right)^{\frac{n}{2}}\right)\Bigg]\int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t.
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

由于$r \ge p$, 因此

$$
\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t + \frac{2(p-1)}{p}\int_{M_t} |\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2 d\mu_t \le C_{14} r^{\frac{p+n}{p-n}+n}\int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t, \tag{4.36}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
C_{14} =& 2(200)^2 C_n^{\frac{n}{p}}\left((2\Lambda)^{\frac{n(n+2)}{p}} + \frac{p-n}{p}\left(\frac{2n}{p(p-1)}(200)^2 C_n^{\frac{n}{p}}\right)^{\frac{n}{p-n}}\right) \\
& + \frac{2}{n}C_{13}\left(1+\left(\frac{2}{n(p-1)}C_{13}\right)^{\frac{n}{2}}\right).
\end{aligned}
$$

令$r = p$, 我们得到

$$
\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t} h_\sigma^p d\mu_t \le C_{15}\int_{M_t} h_\sigma^p d\mu_t, \tag{4.37}
$$

这里$C_{15} = C_{14}p^{\frac{p+n}{p-n}+n}$是依赖于$n, \Lambda$和$p$的正常数. 根据极大值原理, 存在只依赖于$n, \Lambda$和$p$的正常数$T_2' = \frac{p\ln\frac{3}{2}}{C_{15}}$, 使得当$t \in [0, \min\{T', T_2'\})$时, 有

$$
\int_{M_t} |\mathring{A}|^p d\mu_t < \left(\frac{3\varepsilon}{2}\right)^p.
$$

令$T_0' = \min\{T_1', T_2'\}$. 以下采用与证明定理4相同的方法, 对(4.36)进行Moser迭代, 可知$T' \ge T_0'$, 进而证明$M_{T_0'}$是凸的, 从而由[33]中的收敛性定理得到定理5的结论.

第五章　欧氏空间中高余维平均曲率流的收敛性定理

本章我们研究欧氏空间中高余维平均曲率流在曲率积分拼挤条件下的收敛性问题. 假设M^n为n维紧致无边流形, $F: M \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+p}$是一族光滑浸入到欧氏空间$\mathbb{R}^{n+p}$中的子流形. 我们称$F_t$是以$F_0$为初始流形的欧氏空间中高余维平均曲率流的解, 如果F_t满足

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}F(x,t) = H(x,t), & x \in M,\ t \geq 0, \\ F(x,0) = F_0(x), \end{cases} \tag{5.1}$$

这里$H(x,t)$表示子流形$M_t = F(M,t)$在点x处的平均曲率向量, F_0为给定的初始子流形.

5.1　主要结果

关于欧氏空间中一般子流形的平均曲率流的研究, 目前已知的结果较少. 最近, B. Andrews和C. Baker[2]证明了逐点拼挤条件下欧氏空间中高余维的平均曲率流的收敛性定理, 这一结果部分推广了Huisken[33]关于超曲面的平均曲率流的研究结果.

定理D.[2] *设$M_0 = F_0(M^n)$为$\mathbb{R}^{n+d}$中的$n(\geq 2)$维紧致光滑子流形. 若在M_0上处处满足$H \neq 0$, 并且$|A|^2 \leq c|H|^2$, 这里常数*

$$c \leq \begin{cases} \frac{4}{3n}, & 2 \leq n \leq 4, \\ \frac{1}{n-1}, & n \geq 4, \end{cases}$$

则以M_0为初始流形的平均曲率流在有限的最大时间区间$[0,T)$上存在唯一的光滑解$F_t: M^n \to \mathbb{R}^{n+d}$. 当$t \to T$时, $F_t(\cdot)$一致收敛到点$x \in \mathbb{R}^{n+d}$, 并且正规化的平均曲率流收敛到$\mathbb{R}^{n+d}$中的n维标准球面.

在研究整体拼挤条件的基础上, 我们将以上的逐点拼挤条件下高余维平均曲率流的收敛性定理拓广为曲率积分拼挤条件下高余维平均曲率流的收敛性定理. 我们证明: 若初始子流形满足适当的曲率积分拼挤条件, 则欧氏空间中高余

维的平均曲率流在有限时间内收敛性到一个圆点. 设$\mathring{A}$为子流形的无迹第二基本形式, 即$\mathring{A} = A - \frac{1}{n}g \otimes H$.

定理6. 设$F_0 : M^n \to \mathbb{R}^{n+d}(n \geq 3)$为$\mathbb{R}^{n+d}$中的光滑闭子流形. 则对于某一固定的实数$p(>1)$, 存在依赖于$n, p, Vol(M_0)$和$||A||_{n+2}$的正常数$C_3$, 使得如果

$$||\mathring{A}||_p < C_3,$$

那么以F_0为初始子流形的平均曲率流在有限的最大时间区间$[0,T)$上存在唯一的光滑解$F : M^n \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+d}$. 当$t \to T$时, F_t一致收敛到点$x \in \mathbb{R}^{n+d}$, 并且正规化的映射$\widetilde{F}_t = \frac{F_t - x}{\sqrt{2n(T-t)}}$在$C^\infty$意义下收敛到极限嵌入$\widetilde{F}_T$, 使得$\widetilde{F}_T(M)$为$\mathbb{R}^{n+d}$中的$n$维标准球面.

定理7. 设$F_0 : M^n \to \mathbb{R}^{n+d}(n \geq 3)$为$\mathbb{R}^{n+d}$中的光滑闭子流形. 则对于某一固定的实数$p(>n)$, 存在依赖于$n, p, Vol(M_0)$和$||H||_{n+2}$的正常数$C_4$, 使得如果

$$||\mathring{A}||_p < C_4,$$

那么以F_0为初始子流形的平均曲率流在有限的最大时间区间$[0,T)$上存在唯一的光滑解$F : M^n \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+d}$. 当$t \to T$时, F_t一致收敛到点$x \in \mathbb{R}^{n+d}$, 并且正规化的映射$\widetilde{F}_t = \frac{F_t - x}{\sqrt{2n(T-t)}}$在$C^\infty$意义下收敛到极限嵌入$\widetilde{F}_T$, 使得$\widetilde{F}_T(M)$为$\mathbb{R}^{n+d}$中的$n$维标准球面.

特别地, 我们得到如下的微分球面定理.

定理8. 设$F_0 : M^n \to \mathbb{R}^{n+d}(n \geq 3)$为$\mathbb{R}^{n+d}$中的光滑闭子流形. 则对于某一固定的实数$p(>n)$, 存在依赖于$n, p, Vol(M_0)$和$||H||_{n+2}$的正常数$C_5$, 使得如果

$$||\mathring{A}||_p < C_5,$$

那么M微分同胚于n维标准球面.

定理9. 设$F_0 : M^n \to \mathbb{R}^{n+d}(n \geq 3)$为$\mathbb{R}^{n+d}$中的光滑闭子流形, 并且在$M_0 =$

$F_0(M)$上处处满足$H \neq 0$. 则对于某一固定的实数$p(> n)$, 存在依赖于n, p, $||H||_{n+2}$和$\min_{M_0}|H|$的正常数C_6, 使得如果

$$||\mathring{A}||_p < C_6,$$

那么M微分同胚于n维标准球面.

5.2　高余维平均曲率流的收敛性定理 I

本节我们证明定理6. 我们需要用到以下的Sobolev不等式.

引理5.1. 设M为$\mathbb{R}^{n+d}$中的紧致无边$n(\geq 3)$维子流形. 则对M上所有的Lipschitz函数v, 有

$$\left(\int_M v^{\frac{2n}{n-2}}d\mu\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C_n\left(\int_M |\nabla v|^2 d\mu + \int_M |H|^{n+2}d\mu \int_M v^2 d\mu\right),$$

其中H表示M的平均曲率, $C_n = 2(2c(n))^{\frac{n^2+2n-2}{n-2}}$, 这里$c(n) = \frac{2^n(1+n)^{1+\frac{1}{n}}}{(n-1)\omega_n}$, ω_n表示$\mathbb{R}^{n+d}$中的n维单位球的体积.

对于$d = 1$的情形, [40]已经给出了证明. 应用相同的方法便可证明$d > 1$时该结论同样成立.

我们将定理6的证明分为三个部分.

定理6的证明. 记$\Lambda = ||A||_{n+2}$. 假设以F_0为初始子流形的平均曲率流解的最大存在时间为$T_{\max}$. 由[74]可知$T_{\max} < +\infty$.

第一步. 我们首先证明对于任意给定的正数ε, 若对于某个$p > 1$, 有

$$||\mathring{A}||_p < \varepsilon, \tag{5.2}$$

则以F_0为初始子流形的平均曲率流解的最大存在时间$T_{\max}$满足$T_{\max} > T_0$, 这里T_0 是依赖于n, p和Λ的正常数, 它与ε无关. 并且在$t \in [0, T_0]$上有$||A(t)||_{n+2} \leq 2\Lambda$, $||\mathring{A}(t)||_p \leq 2\varepsilon$.

令

$$T = \sup\{t \in [0, T_{\max}) : ||A(t)||_{n+2} < 2\Lambda, ||\mathring{A}(t)||_p < 2\varepsilon\}.$$

我们考虑时间区间$[0,T)$上的平均曲率流. 由第二基本形式的发展方程可知

$$\frac{\partial}{\partial t}|A|^2 \leq \Delta |A|^2 + c_1 |A|^4,$$

其中c_1是仅依赖于n的正常数. 令$u=|A|^2$, 我们得到

$$\frac{\partial}{\partial t}u \leq \Delta u + c_1 u^2. \tag{5.3}$$

由(5.3)和$d\mu$的发展方程我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t} u^{\frac{n+2}{2}} d\mu_t =& \int_{M_t} \frac{n+2}{2} u^{\frac{n+2}{2}-1} \frac{\partial}{\partial t} u d\mu_t + \int_{M_t} u^{\frac{n+2}{2}} \frac{\partial}{\partial t} d\mu_t \\ =& \frac{n+2}{2}\int_{M_t} u^{\frac{n+2}{2}-1}(\Delta u + cu^2 d\mu_t) - \int_{M_t} H^2 u^{\frac{n+2}{2}} d\mu_t \\ \leq& -\frac{4n}{n+2}\int_{M_t} |\nabla u^{\frac{n+2}{4}}|^2 d\mu_t + \frac{n+2}{2}c_1 \int_{M_t} u^{\frac{n+2}{2}+1} d\mu_t.\end{aligned} \tag{5.4}$$

对于(5.4)右边第二项, 由Hölder不等式可知, 对于$\epsilon>0$, 有

$$\begin{aligned}\int_{M_t} u^{\frac{n+2}{2}+1} d\mu_t \leq& \left(\int_{M_t} u^{\frac{n+2}{2}} d\mu_t\right)^{\frac{2}{n+2}} \cdot \left(\int_{M_t} (u^{\frac{n+2}{2}})^{\frac{n+2}{n}} d\mu_t\right)^{\frac{n}{n+2}} \\ \leq& \left(\int_{M_t} u^{\frac{n+2}{2}} d\mu_t\right)^{\frac{2}{n+2}} \cdot \left(\int_{M_t} u^{\frac{n+2}{2}} d\mu_t\right)^{\frac{2}{n+2}} \cdot \left(\int_{M_t} (u^{\frac{n+2}{4}})^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_t\right)^{\frac{n-2}{n+2}} \\ \leq& \left(\int_{M_t} u^{\frac{n+2}{2}} d\mu_t\right)^{\frac{2}{n+2}} \cdot \left(\int_{M_t} u^{\frac{n+2}{2}} d\mu_t\right)^{\frac{2}{n+2}} \\ &\times \left[C_n\left(\int_{M_t} |\nabla u^{\frac{n+2}{4}}|^2 d\mu_t + \int_{M_t} |H|^{n+2} d\mu_t \int_{M_t} u^{\frac{n+2}{2}} d\mu_t\right)\right]^{\frac{n}{n+2}} \\ \leq& \left(\int_{M_t} u^{\frac{n+2}{2}} d\mu_t\right)^{\frac{4}{n+2}} \cdot \left[C_n^{\frac{n}{n+2}}\left(\int_{M_t} |\nabla u^{\frac{n+2}{4}}|^2 d\mu_t\right)^{\frac{n}{n+2}}\right. \\ &\left. + n^{\frac{n}{2}}(2\Lambda)^n C_n^{\frac{n}{n+2}}\left(\int_{M_t} u^{\frac{n+2}{2}} d\mu_t\right)^{\frac{2n}{n+2}}\right] \\ \leq& n^{\frac{n}{2}}(2\Lambda)^n C_n^{\frac{n}{n+2}}\left(\int_{M_t} u^{\frac{n+2}{2}} d\mu_t\right)^2 \\ &+ C_n^{\frac{n}{n+2}} \cdot \frac{2}{n+2}\epsilon^{\frac{n+2}{2}}\left(\int_{M_t} u^{\frac{n+2}{2}} d\mu_t\right)^2 \\ &+ C_n^{\frac{n}{n+2}} \cdot \frac{n}{n+2}\epsilon^{-\frac{n+2}{n}}\int_{M_t} |\nabla u^{\frac{n+2}{4}}|^2 d\mu_t.\end{aligned} \tag{5.5}$$

根据(5.4)和(5.5)我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t} u^{\frac{n+2}{2}}d\mu_t \leq&\frac{n+2}{2}c_1\Big(n^{\frac{n}{2}}(2\Lambda)^nC_n^{\frac{n}{n+2}}+C_n^{\frac{n}{n+2}}\cdot\frac{2}{n+2}\epsilon^{\frac{n+2}{2}}\Big)\Big(\int_{M_t} u^{\frac{n+2}{2}}d\mu_t\Big)^2\\&+\Big(\frac{n}{2}c_1C_n^{\frac{n}{n+2}}\epsilon^{-\frac{n+2}{n}}-\frac{4n}{n+2}\Big)\int_{M_t}|\nabla u^{\frac{n+2}{4}}|^2d\mu_t.\end{aligned}\tag{5.6}$$

取$\epsilon=\left(\frac{(n+2)c_1C_n^{\frac{n}{n+2}}}{8}\right)^{\frac{n}{n+2}}$, 则(5.6)式化简为

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t}|A|^{n+2}d\mu_t\leq c_2\Big(\int_{M_t}|A|^{n+2}d\mu_t\Big)^2,\tag{5.7}$$

其中$c_2=\frac{n+2}{2}c_1\left(n^{\frac{n}{2}}(2\Lambda)^nC_n^{\frac{n}{n+2}}+C_n^{\frac{n}{n+2}}\cdot\frac{2}{n+2}\left(\frac{(n+2)c_1C_n^{\frac{n}{n+2}}}{8}\right)^{\frac{n}{2}}\right)$.

由(5.7)式, 根据极大值原理可知, 对于$T_1=\frac{1-(\frac{2}{3})^{n+2}}{c_2\Lambda^{n+2}}$, 在$t\in[0,\min\{T,T_1\})$上, 有

$$||A(t)||_{n+2}<\frac{3}{2}\Lambda.\tag{5.8}$$

对于$|\mathring{A}|^2$的发展方程, 有

$$\frac{\partial}{\partial t}|\mathring{A}|^2\leq\Delta|\mathring{A}|^2-2|\nabla\mathring{A}|^2+c_3|A|^2|\mathring{A}|^2,\tag{5.9}$$

这里$c_3\geq c_1$是只依赖于n的正常数.

定义张量$\tilde{\mathring{A}}$为$\tilde{\mathring{A}}_{ij}^{\alpha}=\mathring{A}_{ij}^{\alpha}+\sigma\eta^{\alpha}\delta_{ij}$, 其中$\eta^{\alpha}=1$. 令$h_\sigma=|\tilde{\mathring{A}}|=(|\mathring{A}|^2+nd\sigma^2)^{\frac{1}{2}}$. 则由(5.9)得到

$$\frac{\partial}{\partial t}h_\sigma\leq\Delta h_\sigma+c_3|A|^2h_\sigma.\tag{5.10}$$

对于任意的$r\geq p>1$, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t}h_\sigma^rd\mu_t=&\int_{M_t}h_\sigma^{r-1}\frac{\partial}{\partial t}h_\sigma d\mu_t+\frac{1}{r}\int_{M_t}h_\sigma^p\frac{\partial}{\partial t}d\mu_t\\\leq&-\frac{4(r-1)}{r^2}\int_{M_t}|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2d\mu_t+c_3\int_{M_t}|A|^2h_\sigma^rd\mu_t.\end{aligned}\tag{5.11}$$

根据T的定义, 在$t\in[0,T)$上有$\int_{M_t}|A|^{n+2}d\mu_t\leq(2\Lambda)^{n+2}$. 由引理5.1中的Sobolev不等式, 对于Lipschitz函数v有

$$\Big(\int_M v^{\frac{2n}{n-2}}d\mu\Big)^{\frac{n-2}{n}}\leq C_n\Big(\int_M|\nabla v|^2d\mu+n^{\frac{n+2}{2}}(2\Lambda)^{n+2}\int_M v^2d\mu\Big).\tag{5.12}$$

因此对于(5.11)中右边第二项, 我们有以下的估计.

$$
\begin{aligned}
\int_{M_t}|A|^2h_\sigma^r d\mu_t \leq & \left(\int_{M_t}|A|^{n+2}d\mu_t\right)^{\frac{2}{n+2}}\left(\int_{M_t}h_\sigma^{r\cdot\frac{n+2}{n}}d\mu_t\right)^{\frac{n}{n+2}} \\
\leq & (2\Lambda)^2\left(\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t\right)^{\frac{2}{n+2}}\left(\int_{M_t}(h_\sigma^r)^{\frac{n}{n-2}}d\mu_t\right)^{\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n}{n+2}} \\
\leq & (2\Lambda)^2\left(\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t\right)^{\frac{2}{n+2}}\Bigg[C_n\Bigg(\int_{M_t}|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2 d\mu_t \\
& + n^{\frac{n+2}{2}}(2\Lambda)^{n+2}\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t\Bigg)\Bigg]^{\frac{n}{n+2}} \\
\leq & (2\Lambda)^2\left(\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t\right)^{\frac{2}{n+2}}\Bigg[C_n^{\frac{n}{n+2}}\left(\int_{M_t}|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2 d\mu_t\right)^{\frac{n}{n+2}} \\
& + n^{\frac{n}{2}}(2\Lambda)^n C_n^{\frac{n}{n+2}}\left(\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t\right)^{\frac{n}{n+2}}\Bigg] \\
= & n^{\frac{n}{2}}(2\Lambda)^{n+2}C_n^{\frac{n}{n+2}}\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t \\
& + (2\Lambda)^2 C_n^{\frac{n}{n+2}}\left(\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t\right)^{\frac{2}{n+2}}\left(\int_{M_t}|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2 d\mu_t\right)^{\frac{n}{n+2}} \\
\leq & n^{\frac{n}{2}}(2\Lambda)^{n+2}C_n^{\frac{n}{n+2}}\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t \\
& + (2\Lambda)^2 C_n^{\frac{n}{n+2}}\cdot\frac{2}{n+2}\mu^{\frac{n+2}{2}}\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t \\
& + (2\Lambda)^2 C_n^{\frac{n}{n+2}}\cdot\frac{n}{n+2}\mu^{-\frac{n+2}{n}}\int_{M_t}|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2 d\mu_t,
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

其中μ是某个正数. 综合(5.11)与(5.13)我们得到

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t \leq & \left(c_3(2\Lambda)^2C_n^{\frac{n}{n+2}}\cdot\frac{n}{n+2}\mu^{-\frac{n+2}{n}}-\frac{4(r-1)}{r^2}\right)\int_{M_t}|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2 d\mu_t \\
& + c_3\left(n^{\frac{n}{2}}(2\Lambda)^{n+2}C_n^{\frac{n}{n+2}}+(2\Lambda)^2C_n^{\frac{n}{n+2}}\cdot\frac{2}{n+2}\mu^{\frac{n+2}{2}}\right)\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t.
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

取$\mu = \left(\frac{c_4 r^2 p}{3rp-4p+r}\right)^{\frac{n}{n+2}}$, 其中$c_4 = c_3(2\Lambda)^2 C_n^{\frac{n}{n+2}} \cdot \frac{n}{n+2}$. 则由(5.14)可知

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t + \left(1-\frac{1}{p}\right)\int_{M_t} |\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2 d\mu_t \\ \leq\ &\left(c_5 + c_6\left(\frac{r^2 p}{3rp-4p+r}\right)^{\frac{n}{2}}\right)\cdot r \cdot \int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t, \end{aligned} \tag{5.15}$$

其中$c_5 = c_3 n^{\frac{n}{2}}(2\Lambda)^{n+2} C_n^{\frac{n}{n+2}}$, $c_6 = c_3(2\Lambda)^2 C_n^{\frac{n}{n+2}} \cdot \frac{2}{n+2} \cdot c_4^{\frac{n}{2}}$.

令$r = p$. 则(5.15)化简为

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t} h_\sigma^p d\mu_t \leq c_7 \int_{M_t} h_\sigma^p d\mu_t, \tag{5.16}$$

其中$c_7 = p\cdot\left(c_5 + c_6\left(\frac{p^2}{3p-3}\right)^{\frac{n}{2}}\right)$.

令$\sigma \to 0$, 则由(5.16)得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t} |\mathring{A}|^p d\mu_t \leq c_7 \int_{M_t} |\mathring{A}|^p d\mu_t.$$

根据极大值原理, 存在正常数$T_2 = \frac{p\ln\frac{3}{2}}{c_7}$, 使得在$t \in [0, \min\{T, T_2\})$上有

$$\|\mathring{A}(t)\|_p < \frac{3}{2}\varepsilon. \tag{5.17}$$

令$T_0 = \min\{T_1, T_2\}$. 我们来证明$T > T_0$. 我们采用反证法, 假设$T \leq T_0$. 则在$[0, T)$上有(5.8)和(5.17)成立.

若$T < T_{\max}$, 根据平均曲率流的光滑性, 存在正常数ϑ, 使得在$[0, T+\vartheta)$上有

$$\|A(t)\|_{n+2} < \frac{5}{3}\Lambda, \quad \|\mathring{A}(t)\|_p < \frac{5}{3}\varepsilon.$$

这与T的定义相矛盾.

若$T = T_{\max}$, 我们证明平均曲率流可以延拓到时间$T_{\max}$之后. 对于(5.15), 考虑到$r \geq p$, 我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t + \left(1-\frac{1}{p}\right)\int_{M_t} |\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2 d\mu_t \leq c_8 r^{n+1} \cdot \int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t, \tag{5.18}$$

其中$c_8 = \max\{\frac{c_5}{p^n}, \frac{c_6}{(3p-3)^{\frac{n}{2}}}\}$. 对于任意的满足$0 < \tau < \tau' < T_{\max} - \theta$的$\tau$和$\tau'$, 以及任意的$t \in [\tau', T_{\max} - \theta]$, 其中$\theta$是某个充分小的正常数, 由(5.18)我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \int_{\tau'}^{t} \int_{M_t} |\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2 d\mu_t dt \\
\leq\ & \left(c_8 r^{n+1} + \frac{1}{\tau' - \tau}\right) \int_{\tau}^{T_{\max}-\theta} \int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t dt.
\end{aligned} \tag{5.19}
$$

由Sobolev不等式(5.12), 我们得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{\tau'}^{T_{\max}-\theta} \int_{M_t} h_\sigma^{r(1+\frac{2}{n})} d\mu_t dt \\
\leq &\int_{\tau'}^{T_{\max}-\theta} \left(\int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t\right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_{M_t} h_\sigma^{\frac{nr}{n-2}} d\mu_t\right)^{\frac{n-2}{n}} dt \\
\leq &\max_{t \in [\tau', T_{\max}-\theta]} \left(\int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t\right)^{\frac{2}{n}} \int_{\tau'}^{T_{\max}-\theta} \left(\int_{M_t} h_\sigma^{\frac{nr}{n-2}} d\mu_t\right)^{\frac{n-2}{n}} dt \\
\leq &C_n \max_{t \in [\tau', T_{\max}-\theta]} \left(\int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t\right)^{\frac{2}{n}} \\
&\times \int_{\tau'}^{T_{\max}-\theta} \left(\int_{M_t} |\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2 d\mu_t + n^{\frac{n+2}{2}} (2\Lambda)^{n+2} \int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t\right) dt.
\end{aligned} \tag{5.20}
$$

根据(5.19)和(5.20), 我们有

$$
\begin{aligned}
\int_{\tau'}^{T_{\max}-\theta} \int_{M_t} h_\sigma^{r(1+\frac{2}{n})} d\mu_t dt \leq & c_9 \left(c_8 r^{n+1} + \frac{1}{\tau' - \tau}\right)^{1+\frac{2}{n}} \\
& \times \left(\int_{\tau}^{T_{\max}-\theta} \int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t dt\right)^{1+\frac{2}{n}},
\end{aligned} \tag{5.21}
$$

其中$c_9 = C_n \cdot \max\{\frac{p}{p-1}, n^{\frac{n+2}{2}} (2\Lambda)^{n+2} T_0\}$.

令

$$
J(r, t) = \int_{t}^{T_{\max}-\theta} \int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t dt.
$$

则(5.21)化简为

$$
J\left(r\left(1 + \frac{2}{n}\right), \tau'\right) \leq c_9 \left(c_8 r^{n+1} + \frac{1}{\tau' - \tau}\right)^{1+\frac{2}{n}} J(r, \tau)^{1+\frac{2}{n}}. \tag{5.22}
$$

取

$$
\mu = 1 + \frac{2}{n}, \quad r_k = p\mu^k, \quad \tau_k = \left(1 - \frac{1}{\mu^{k+1}}\right) t.
$$

注意到$\mu > 1$, 由(5.22)我们得到

$$J(r_{k+1},\tau_{k+1})^{\frac{1}{r_{k+1}}} \le c_9^{\frac{1}{r_{k+1}}}\left(c_8 p^{n+1} + \frac{\mu^2}{\mu-1}\cdot\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{r_k}} \mu^{\frac{k}{r_k}\cdot(n+1)} J(r_k,\tau_k)^{\frac{1}{r_k}}.$$

于是有

$$\begin{aligned} J(r_{m+1},\tau_{m+1})^{\frac{1}{r_{m+1}}} \le & c_9^{\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{r_{k+1}}}\left(c_8 p^{n+1} + \frac{\mu^2}{\mu-1}\cdot\frac{1}{t}\right)^{\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{r_k}} \\ & \cdot \mu^{(n+1)\cdot\sum_{k=0}^{m}\frac{k}{r_k}} J(p,t)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

令$m \to +\infty$, 我们得到

$$\begin{aligned} h_\sigma(x,t) \ \le \ & \left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n(n+1)(n+2)}{4p}} c_9^{\frac{n}{2p}}\left(c_8 p^{n+1} + \frac{(n+2)^2}{2nt}\right)^{\frac{n+2}{2p}} \\ & \times\left(\int_0^{T_{\max}-\theta}\int_{M_t} h_\sigma^p d\mu_t dt\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{5.23}$$

令$\sigma \to 0$, $\theta \to 0$. 则在$t \in [\frac{T_{\max}}{2}, T_{\max})$上有

$$|\mathring{A}|^2(x,t) \le C(n,p,\Lambda,\varepsilon,T_{\max}) < +\infty.$$

这表明存在不依赖于t的正常数a和b, 使得在$[0,T_{\max})$上有

$$|A|^2 \le a|H|^2 + b.$$

另一方面, 由于$T_{\max} < +\infty$, 我们有

$$\int_0^{T_{\max}}\int_{M_t} |H|^{n+2} d\mu_t dt < +\infty,$$

于是由第三章中的定理3可知, 平均曲率流可以延拓到时间$T_{\max}$之后. 这与$T_{\max}$的定义相矛盾. 这就证明了$T > T_0$.

根据T的定义, 在$t \in [0,T_0]$上我们有

$$\|A(t)\|_{n+2} < 2\Lambda, \quad \|\mathring{A}(t)\|_p < 2\varepsilon. \tag{5.24}$$

这就完成了第一步的证明.

第二步. 我们用$Vol(\Sigma)$表示黎曼流形Σ的体积. 记$V = Vol(M_0)$. 我们证明, 如果选取充分小的ε, 则在某个时刻$T_3 \in [\frac{T_0}{2}, T_0]$, 平均曲率具有依赖于$n$, p, V和Λ的正的常数下界.

由于子流形的体积沿平均曲率流是单调不增的, 因此在$t \in [0, T_{\max})$上有

$$Vol(M_t) \le V. \tag{5.25}$$

由于M_t是欧氏空间中的闭子流形, 由全平均曲率不等式(见[13])可知

$$n^n \omega_n \le \int_{M_t} |H|^n d\mu_t \le |H|^n_{\max}(t) Vol(M_t) \le |H|^n_{\max}(t) V,$$

这里$|H|_{\max}(t) = \max_{M_t} |H|(\cdot, t)$. 这表明在$t \in [0, T_{\max})$上有

$$|H|^2_{\max}(t) \ge n^n \omega_n V^{-1} := c_{10}. \tag{5.26}$$

另一方面, 由[67], 存在仅依赖于n的正常数c_{11}, 使得在$t \in [0, T_{\max})$上有

$$diam(M_t) \le c_{11} \int_{M_t} |H|^{n-1} d\mu_t,$$

其中$diam(M_t)$表示M_t的直径. 综合Hölder不等式, (5.24)和(5.25)可知, 在$t \in [0, T_{\max})$上有

$$diam(M_t) \le c_{11} n^{\frac{n-1}{2}} (2\Lambda)^{n-1} V^{\frac{2}{n+2}} := c_{12}. \tag{5.27}$$

由于$T > T_0$, 我们考虑$[\frac{T_0}{2}, T_0]$上的平均曲率流. 采用与(5.23)相似的Moser迭代可知, 在$t \in [\frac{T_0}{2}, T_0]$上有

$$|\mathring{A}| \le \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n(n+1)(n+2)}{4p}} c_9^{\frac{n}{2p}} \left(c_8 p^{n+1} + \frac{(n+2)^2}{nT_0}\right)^{\frac{n+2}{2p}} \cdot T_0^{\frac{1}{p}} \cdot 2\varepsilon := c_{13}\varepsilon. \tag{5.28}$$

这里c_{13}是依赖于n, p, V和Λ, 并且不依赖于ε的常数.

对于$u = |A|^2$, 由于$c_1 \le c_3$, 我们由(5.3)可知

$$\frac{\partial}{\partial t} u \le \Delta u + c_3 |A|^2 u. \tag{5.29}$$

与第一步中对h_σ的Moser迭代过程类似, 我们在$t \in [\frac{T_0}{2}, T_0]$上有

$$|A|^2 \le \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} c_{15}^{\frac{n}{n+2}} \left(c_{14} \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1} + \frac{(n+2)^2}{nT_0}\right) \cdot T_0^{\frac{2}{n+2}} \cdot 2\Lambda := c_{16}, \tag{5.30}$$

这里$c_{14}=\max\{\frac{c_5 2^n}{(n+2)^n},\frac{c_6 2^{\frac{n}{2}}}{(3n)^{\frac{n}{2}}}\}$, $c_{15}=C_n\cdot\max'\{\frac{n+2}{n},n^{\frac{n+2}{2}}(2\Lambda)^{n+2}T_0\}$. 令

$$G=\Big(t-\frac{T_0}{2}\Big)|\nabla\mathring{A}|^2+|\mathring{A}|^2.$$

在$[\frac{T_0}{2},T_0]$上考虑G的发展方程. 根据[2], 我们有

$$\nabla_t(\nabla\mathring{A})=\nabla(\nabla_t\mathring{A})+A*A*\nabla A.$$

这里∇表示空间向量丛上的联络. 对每个时刻t, 它与度量为$g(t)$的Levi-Civita联络相同. 考虑$\mathring{A}$的发展方程

$$\nabla_t\mathring{A}=\Delta\mathring{A}+A*A*A.$$

另一方面, 我们有

$$\nabla(\Delta\mathring{A})=\Delta(\nabla\mathring{A})+A*A*\nabla A,$$

因此

$$\nabla_t(\nabla\mathring{A})=\Delta(\nabla\mathring{A})+A*A*\nabla A.$$

这表明

$$\frac{\partial}{\partial t}|\nabla\mathring{A}|^2\leq\Delta|\nabla\mathring{A}|^2+c_{17}|A|^2|\nabla\mathring{A}|^2,\tag{5.31}$$

其中c_{17}是仅依赖于n的正常数. 这里我们应用了关系式$|\nabla A|^2\leq\frac{3n}{2(n-1)}|\nabla\mathring{A}|^2$(见[2]).

由(5.9)和(5.31), 我们得到

$$\frac{\partial}{\partial t}G\leq\Delta G+\bigg(\Big(t-\frac{T_0}{2}\Big)c_{17}|A|^2-1\bigg)|\nabla\mathring{A}|^2+c_3|A|^2|\mathring{A}|^2.\tag{5.32}$$

由(5.28), (5.30)和(5.32)可知, 在$t\in[\frac{T_0}{2},T_0]$上有

$$\frac{\partial}{\partial t}G\leq\Delta G+\bigg(\Big(t-\frac{T_0}{2}\Big)c_{17}c_{16}-1\bigg)|\nabla\mathring{A}|^2+c_3c_{16}c_{13}^2\varepsilon^2.\tag{5.33}$$

令$T_3=\min\{T_0,\frac{T_0}{2}+\frac{1}{c_{17}c_{16}}\}$, 则$\frac{T_0}{2}\leq T_3\leq T_0$. 因此由(5.33)可知在$t\in[\frac{T_0}{2},T_3]$上有

$$\frac{\partial}{\partial t}G\leq\Delta G+c_3c_{16}c_{13}^2\varepsilon^2.$$

根据极大值原理可知, 在$t\in[\frac{T_0}{2},T_3]$上有

$$G(t)-G\Big(\frac{T_0}{2}\Big)\leq c_3c_{16}c_{13}^2\Big(t-\frac{T_0}{2}\Big)\varepsilon^2.$$

因此

$$\left(t-\frac{T_0}{2}\right)|\nabla\mathring{A}|^2 \le |\mathring{A}|^2\left(\frac{T_0}{2}\right)+c_3c_{16}c_{13}^2\left(t-\frac{T_0}{2}\right)\varepsilon^2$$
$$\le c_{13}^2\varepsilon^2+c_3c_{16}c_{13}^2\left(t-\frac{T_0}{2}\right)\varepsilon^2.$$

于是, 在$t\in(\frac{T_0}{2},T_3]$上有

$$|\nabla\mathring{A}|^2\le\frac{c_{13}^2}{\left(t-\frac{T_0}{2}\right)}\varepsilon^2+c_3c_{16}c_{13}^2\varepsilon^2. \tag{5.34}$$

另一方面, 由[2]我们得到$|\nabla H|^2\le\frac{3n^2}{2(n-1)}|\nabla\mathring{A}|^2$. 因此(5.34)表明, 当$t=T_3$时有

$$|\nabla H|^2\le\frac{3n^2}{2(n-1)}\cdot\left(\frac{c_{13}^2}{\left(T_3-\frac{T_0}{2}\right)}+c_3c_{16}c_{13}^2\right)\varepsilon^2:=c_{18}^2\varepsilon^2. \tag{5.35}$$

现在我们在T_3时刻考虑子流形M_{T_3}. 假设点$x,y\in M_{T_3}$满足

$$|H|(x,T_3)=|H|_{\min}(T_3):=\min_{M_{T_3}}|H|(\cdot,T_3),$$

$$|H|(y,T_3)=|H|_{\max}(T_3):=\max_{M_{T_3}}|H|(\cdot,T_3).$$

设$l:[0,L]\to M_{T_3}$为连接$l(0)=x$和$l(L)=y$的极小测地线. 在$[0,L]$上定义函数$\eta:[0,L]\to\mathbb{R}$为

$$\eta(s)=|H|^2(l(s),T_3).$$

则有$\eta(0)=|H|^2_{\min}(T_3)$, $\eta(L)=|H|^2_{\max}(T_3)$. 由$\eta$的定义可知

$$\left|\frac{d}{ds}\eta(s)\right|=\left|\frac{d}{ds}|H|^2(l(s),T_3)\right|\le\left|(\nabla|H|^2)(l(s),T_3)\right|\le\left|2(|H||\nabla H|)(l(s),T_3)\right|.$$

上式与(5.30)和(5.35)表明

$$\left|\frac{d}{ds}\eta(s)\right|\le 2n^{\frac{1}{2}}c_{16}c_{18}\varepsilon. \tag{5.36}$$

于是我们有

$$\eta(L)-\eta(0)=\int_0^L\frac{d}{ds}\eta ds\le diam(M_{T_3})\cdot 2n^{\frac{1}{2}}c_{16}c_{18}\varepsilon. \tag{5.37}$$

综合(5.26), (5.27)和(5.37), 我们得到

$$|H|^2_{\min}(T_3) \geq c_{10} - c_{19}\varepsilon, \tag{5.38}$$

其中$c_{19} = 2n^{\frac{1}{2}}c_{16}c_{18}c_{12}$.

令$\varepsilon_1 = \frac{c_{10}}{2c_{19}}$. (5.38)表明若$\varepsilon \leq \varepsilon_1$, 则

$$|H|^2_{\min}(T_3) \geq \frac{c_{10}}{2}. \tag{5.39}$$

这就完成了第二步证明.

第三步. 我们完成定理6的证明. 考虑子流形M_{T_3}. 令

$$\varepsilon_2 = \begin{cases} \frac{c_{10}^{\frac{1}{2}}}{3\sqrt{2}c_{13}}, & n = 3, \\ \frac{c_{10}^{\frac{1}{2}}}{2[n(n-1)]^{\frac{1}{2}}c_{13}}, & n \geq 4. \end{cases}$$

根据(5.28)和(5.39)可知, 若$\varepsilon \leq \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, 则

$$|A|^2(T_3) \leq \frac{4}{9}|H|^2(T_3), \quad n = 3,$$

$$|A|^2(T_3) \leq c_{13}^2\varepsilon_2^2 + \frac{1}{n}|H|^2(T_3) \leq \frac{|H|^2(T_3)}{n-1}, \quad n \geq 4.$$

取$C_3 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, 它只依赖于$n$, p, V和Λ. 根据平均曲率流的解的唯一性以及[2]中的收敛性定理, 我们便证明了以F_0为初始流形的平均曲率流在有限时间内收敛到一个圆点. 这就完成了定理6的证明.

5.3 高余维平均曲率流的收敛性定理 II

本节我们证明定理7. 采用的方法与定理6的证明类似.

定理7的证明. 令$\Lambda = ||H||_{n+2}$. 假设对某个取定的$p > n$和$\varepsilon \in (0, 100]$, 有

$$||\mathring{A}||_p < \varepsilon. \tag{5.40}$$

令

$$T' = \sup\{t \in [0, T_{\max}) : ||H||_{n+2} < 2\Lambda, ||\mathring{A}||_p < 2\varepsilon\}.$$

我们考虑时间区间$[0,T')$上的平均曲率流.

对于$|H|^2$, 我们有如下的发展方程(见[2, 70])

$$\frac{\partial}{\partial t}|H|^2 \le \Delta|H|^2 - 2|\nabla H|^2 + c_{20}|A|^2|H|^2,$$

其中c_{20}是仅依赖于n的正常数. 令$w = |H|^2$. 则有

$$\frac{\partial}{\partial t}w \le \Delta w + c_{20}|\mathring{A}|^2 w + \frac{c_{20}}{n}w^2. \tag{5.41}$$

由(5.41)可知, 对于$r > 1$, 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t} w^r d\mu_t \le &-\frac{4(r-1)}{r^2}\int_{M_t}|\nabla w^{\frac{r}{2}}|^2 d\mu_t \\ &+ c_{20}\int_{M_t}|\mathring{A}|^2 w^r d\mu_t + \frac{c_{20}}{n}\int_{M_t} w^{r+1}d\mu_t.\end{aligned} \tag{5.42}$$

取$r = \frac{n+2}{2}$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{M_t} w^{\frac{n+2}{2}+1}d\mu_t \le &C_n^{\frac{n}{n+2}}(2\Lambda)^n\left(\int_{M_t} w^{\frac{n+2}{2}}d\mu_t\right)^2 + C_n^{\frac{n}{n+2}}\cdot\frac{2}{n+2}\epsilon^{\frac{n+2}{2}}\left(\int_{M_t} w^{\frac{n+2}{2}}d\mu_t\right)^2 \\ &+ C_n^{\frac{n}{n+2}}\cdot\frac{n}{n+2}\epsilon^{-\frac{n+2}{n}}\int_{M_t}|\nabla w^{\frac{n+2}{4}}|^2 d\mu_t,\end{aligned} \tag{5.43}$$

这里$\epsilon > 0$. 类似于(5.13), 我们有

$$\begin{aligned}\int_{M_t}|\mathring{A}|^2 w^{\frac{n+2}{2}}d\mu_t \le &\left((200)^2 C_n^{\frac{n}{p}}(2\Lambda)^{\frac{n(n+2)}{p}} + (200)^2 C_n^{\frac{n}{p}}\frac{p-n}{p}\mu^{\frac{p}{p-n}}\right)\int_{M_t} w^{\frac{n+2}{2}}d\mu_t \\ &+ (200)^2 C_n^{\frac{n}{p}}\frac{n}{p}\mu^{-\frac{p}{n}}\int_{M_t}|\nabla w^{\frac{n+2}{4}}|^2 d\mu_t,\end{aligned} \tag{5.44}$$

其中$\mu > 0$. 综合(5.42), (5.43)和(5.44), 我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{2}{n+2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t} w^{\frac{n+2}{2}}d\mu_t \\ \le&\left(c_{20}(200)^2 C_n^{\frac{n}{p}}\cdot\frac{n}{p}\cdot\mu^{-\frac{p}{n}} + \frac{c_{20}}{n}\cdot C_n^{\frac{n}{n+2}}\cdot\frac{n}{n+2}\epsilon^{-\frac{n+2}{n}} - \frac{8n}{(n+2)^2}\right)\int_{M_t}|\nabla w^{\frac{r}{2}}|^2 d\mu_t \\ &+ c_{20}\left((200)^2 C_n^{\frac{n}{p}}(2\Lambda)^{\frac{n(n+2)}{p}} + (200)^2 C_n^{\frac{n}{p}}\frac{p-n}{p}\mu^{\frac{p}{p-n}}\right)\int_{M_t} w^{\frac{n+2}{2}}d\mu_t \\ &+ \frac{c_{20}}{n}\left(C_n^{\frac{n}{n+2}}(2\Lambda)^n + C_n^{\frac{n}{n+2}}\cdot\frac{2}{n+2}\epsilon^{\frac{n+2}{2}}\right)\left(\int_{M_t} w^{\frac{n+2}{2}}d\mu_t\right)^2.\end{aligned} \tag{5.45}$$

取

$$\mu = \left(\frac{(200)^2(n+2)^2}{4p} \cdot c_{20} C_n^{\frac{n}{p}}\right)^{\frac{n}{p}}, \epsilon = \left(\frac{n+2}{4n} \cdot c_{20} C_n^{\frac{n}{n+2}}\right)^{\frac{n}{n+2}}.$$

则由(5.45)得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{M_t} w^{\frac{n+2}{2}} d\mu_t \leq c_{21} \int_{M_t} w^{\frac{n+2}{2}} d\mu_t + c_{22} \left(\int_{M_t} w^{\frac{n+2}{2}} d\mu_t\right)^2, \tag{5.46}$$

其中

$$c_{21} = (200)^2 c_{20} C_n^{\frac{n}{p}} \left[(2\Lambda)^{\frac{n(n+2)}{p}} + \frac{p-n}{p} \left(\frac{(200)^2(n+2)^2}{4p} \cdot c_{20} C_n^{\frac{n}{p}}\right)^{\frac{n}{p-n}}\right],$$

$$c_{22} = \frac{c_{20}}{n} C_n^{\frac{n}{n+2}} \left[(2\Lambda)^n + \frac{2}{n+2} \left(\frac{n+2}{4n} \cdot c_{20} C_n^{\frac{n}{n+2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right].$$

记$\rho(t)$为以下Bernoulli方程的正解

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho &= c_{21}\rho + c_{22}\rho^2, \\ \rho(0) &= \Lambda^{n+2}. \end{aligned}$$

则有

$$\rho(t) = \frac{e^{c_{21}t}}{\frac{1}{\Lambda^{n+2}} + \frac{c_{22}}{c_{21}} - \frac{c_{22}}{c_{21}} e^{c_{21}t}}, \quad t \in \left[0, \frac{\ln\left(\frac{c_{21}}{c_{22}\Lambda^{n+2}} + 1\right)}{c_{21}}\right).$$

根据极大值原理, 存在正常数

$$T_1' = \frac{1}{c_{21}} \ln\left(\frac{1 + \frac{c_{22}}{c_{21}}\Lambda^{n+2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} + \frac{c_{22}}{c_{21}}\Lambda^{n+2}}\right),$$

使得在$t \in [0, \min\{T', T_1'\})$上有

$$\int_{M_t} w^{\frac{n+2}{2}} d\mu_t < \left(\frac{3}{2}\Lambda\right)^{n+2},$$

或者等价的有

$$||H(t)||_{n+2} < \frac{3}{2}\Lambda. \tag{5.47}$$

根据(5.10), 我们得到

$$\frac{\partial}{\partial t} h_\sigma \leq \Delta h_\sigma + c_3 |\mathring{A}|^2 h_\sigma + \frac{c_3}{n} |H|^2 h_\sigma. \tag{5.48}$$

根据(5.48), 对于$r > 1$有

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t \leq & -\frac{4(r-1)}{r^2}\int_{M_t} |\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2 d\mu_t \\
& + c_3\int_{M_t} |\mathring{A}|^2 h_\sigma^r d\mu_t + \frac{c_3}{n}\int_{M_t} |H|^2 h_\sigma^r d\mu_t.
\end{aligned}
\tag{5.49}
$$

与(5.13)类似, 对于$r \geq p > n$和任意的ν, $\varrho > 0$, 有

$$
\begin{aligned}
\int_{M_t} |\mathring{A}|^2 h_\sigma^r d\mu_t \leq & \Big(\int_{M_t} |\mathring{A}|^p d\mu_t\Big)^{\frac{2}{p}} \Big(\int_{M_t} (h_\sigma^r)^{\frac{p}{p-2}} d\mu_t\Big)^{\frac{p-2}{p}} \\
\leq & (2\varepsilon)^2 \Big(\int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t\Big)^{1-\frac{n}{p}} \Big(\int_{M_t} (h_\sigma^r)^{\frac{n}{n-2}} d\mu_t\Big)^{\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n}{p}} \\
\leq & (2\varepsilon)^2 \Big(\int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t\Big)^{1-\frac{n}{p}} \\
& \times \Big[C_n\Big(\int_{M_t} |\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2 d\mu_t + (2\Lambda)^{n+2}\int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t\Big)\Big]^{\frac{n}{p}} \\
\leq & (2\varepsilon)^2 C_n^{\frac{n}{p}} \Big(\int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t\Big)^{1-\frac{n}{p}} \\
& \times \Big[\Big(\int_{M_t} |\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2 d\mu_t\Big)^{\frac{n}{p}} + (2\Lambda)^{\frac{n(n+2)}{p}} \Big(\int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t\Big)^{\frac{n}{p}}\Big] \\
\leq & (2\varepsilon)^2 C_n^{\frac{n}{p}} (2\Lambda)^{\frac{n(n+2)}{p}} \int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t \\
& + (2\varepsilon)^2 C_n^{\frac{n}{p}} \Big[\frac{p-n}{p}\nu^{\frac{p}{p-n}}\int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t + \frac{n}{p}\nu^{-\frac{p}{n}}\Big(\int_{M_t} |\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2 d\mu_t\Big)\Big] \\
\leq & \Big((200)^2 C_n^{\frac{n}{p}} (2\Lambda)^{\frac{n(n+2)}{p}} + (200)^2 C_n^{\frac{n}{p}} \frac{p-n}{p}\nu^{\frac{p}{p-n}}\Big) \int_{M_t} h_\sigma^r d\mu_t \\
& + (200)^2 C_n^{\frac{n}{p}} \frac{n}{p}\nu^{-\frac{p}{n}} \Big(\int_{M_t} |\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2 d\mu_t\Big),
\end{aligned}
\tag{5.50}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{M_t}|H|^2h_\sigma^r d\mu_t \leq &(2\Lambda)^2\left(\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t\right)^{\frac{2}{n+2}}\left[C_n^{\frac{n}{n+2}}\left(\int_{M_t}|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2d\mu_t\right)^{\frac{n}{n+2}}\right.\\
&\left.+(2\Lambda)^nC_n^{\frac{n}{n+2}}\left(\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t\right)^{\frac{n}{n+2}}\right]\\
\leq &(2\Lambda)^{n+2}C_n^{\frac{n}{n+2}}\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t+(2\Lambda)^2C_n^{\frac{n}{n+2}}\frac{2}{n+2}\varrho^{\frac{n+2}{2}}\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t\\
&+(2\Lambda)^2C_n^{\frac{n}{n+2}}\frac{n}{n+2}\varrho^{-\frac{n+2}{n}}\int_{M_t}|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2d\mu_t.
\end{aligned}
\tag{5.51}
$$

由(5.49), (5.50)和(5.51), 我们得到

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t \leq &\left(c_3(200)^2C_n^{\frac{n}{p}}\frac{n}{p}\nu^{-\frac{p}{n}}+\frac{c_3}{n}(2\Lambda)^2C_n^{\frac{n}{n+2}}\frac{n}{n+2}\varrho^{-\frac{n+2}{n}}\right.\\
&\left.-\frac{4(r-1)}{r^2}\right)\int_{M_t}|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2d\mu_t\\
&+\left(c_3(200)^2C_n^{\frac{n}{p}}(2\Lambda)^{\frac{n(n+2)}{p}}+c_3(200)^2C_n^{\frac{n}{p}}\frac{p-n}{p}\nu^{\frac{p}{p-n}}\right.\\
&\left.+\frac{c_3}{n}\left((2\Lambda)^{n+2}C_n^{\frac{n}{n+2}}+(2\Lambda)^2C_n^{\frac{n}{n+2}}\frac{2}{n+2}\varrho^{\frac{n+2}{2}}\right)\right)\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t.
\end{aligned}
\tag{5.52}
$$

取

$$
\nu^{\frac{p}{n+2}}=\varrho=\left(\frac{c_3(200)^2C_n^{\frac{n}{p}}\cdot\frac{n}{p}+\frac{c_3}{n}(2\Lambda)^2C_n^{\frac{n}{n+2}}\frac{n}{n+2}}{\frac{3r-4}{r^2}}\right)^{\frac{n}{n+2}}.
$$

由于$r\geq p>n$, 我们有

$$
\nu^{\frac{p}{n+2}}=\varrho\leq\left(\frac{c_3(200)^2C_n^{\frac{n}{p}}\cdot\frac{n}{p}+\frac{c_3}{n}(2\Lambda)^2C_n^{\frac{n}{n+2}}\frac{n}{n+2}}{3p-4}\right)^{\frac{n}{n+2}}\cdot r^{\frac{2n}{n+2}}:=c_{23}\cdot r^{\frac{2n}{n+2}}.
$$

则根据(5.52), 我们得到

$$
\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t+\int_{M_t}|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}|^2d\mu_t\leq c_{24}r^{\frac{p+n}{p-n}+n}\int_{M_t}h_\sigma^r d\mu_t,
\tag{5.53}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
c_{24}=&c_3(200)^2C_n^{\frac{n}{p}}(2\Lambda)^{\frac{n(n+2)}{p}}+\frac{c_3}{n}(2\Lambda)^{n+2}C_n^{\frac{n}{n+2}}\\
&+c_{23}^{\frac{n+2}{p-n}}\cdot c_3(200)^2C_n^{\frac{n}{p}}\frac{p-n}{p}+c_{23}^{\frac{n+2}{2}}\cdot\frac{c_3}{n}(2\Lambda)^2C_n^{\frac{n}{n+2}}\frac{2}{n+2}.
\end{aligned}
$$

令$r=p$, 则由(5.53)得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t} h_\sigma^p d\mu_t \le c_{24}p^{\frac{p+n}{p-n}+n}\int_{M_t} h_\sigma^p d\mu_t. \tag{5.54}$$

令$\sigma\to 0$. 根据极大值原理, 存在依赖于n,p和Λ的正常数$T_2'=c_{24}^{-1}p^{-\frac{2n}{p-n}-n}\ln\frac{3}{2}$, 使得在$t\in[0,\min\{T',T_2'\})$上有

$$\|\mathring{A}(t)\|_p<\frac{3}{2}\varepsilon.$$

令$T_0'=\min\{T_1',T_2'\}$. 类似于定理6的证明中的第一步, 我们用反证法证明$T'>T_0'$. 由平均曲率流的光滑性可知$T'<T_{\max}$的情形不成立. 对于$T'=T_{\max}$的情形, 我们对(5.53)应用Moser迭代. 对于充分小的$\theta>0$, 有以下估计

$$\begin{aligned} h_\sigma(x,t) \le & \left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n(n+2)}{4p}\left(\frac{p+n}{p-n}+n\right)} c_{25}^{\frac{n}{2p}}\left(c_{24}p^{\frac{p+n}{p-n}+n}+\frac{(n+2)^2}{2nt}\right)^{\frac{n+2}{2p}} \\ & \times\left(\int_0^{T_{\max}-\theta}\int_{M_t} h_\sigma^p d\mu_t dt\right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned} \tag{5.55}$$

这里$c_{25}=C_n\cdot\max\{1,(2\Lambda)^{n+2}T_0'\}$.

令$\sigma\to 0$, $\theta\to 0$. 则对于$t\in[\frac{T_{\max}}{2},T_{\max})$, 我们有

$$|\mathring{A}|^2(x,t)\le C'(n,p,\Lambda,\varepsilon,T_{\max})<+\infty.$$

这表明存在不依赖于t的正常数a'和b', 使得在$[0,T_{\max})$上有

$$|A|^2\le a'|H|^2+b'.$$

另一方面, 我们有$\int_0^{T_{\max}}\int_{M_t}|H|^{n+2}d\mu_t dt<+\infty$. 应用第三章中的平均曲率流可延拓性定理可知, 平均曲率流可以延拓到时间$T_{\max}$之后. 这一矛盾表明$T'<T_0'$不成立. 于是便证明了$T'>T_0'$.

考虑时间区间$t\in[\frac{T_0'}{2},T_0']$上的平均曲率流. 类似于(5.55), 我们有

$$|\mathring{A}|(x,t)\le\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n(n+2)}{4p}\left(\frac{p+n}{p-n}+n\right)} c_{25}^{\frac{n}{2p}}\left(c_{24}p^{\frac{p+n}{p-n}+n}+\frac{(n+2)^2}{nT_0'}\right)^{\frac{n+2}{2p}} T_0'^{\frac{1}{p}}\cdot 2\varepsilon := c_{26}\varepsilon. \tag{5.56}$$

根据(5.41),

$$\frac{\partial}{\partial t}w\le\Delta w+c_{20}|\mathring{A}|^2 w+\frac{c_{20}}{n}|H|^2 w.$$

则与(5.56)类似的可知, 在$t \in [\frac{T_0'}{2}, T_0']$上有

$$|H|^2(x,t) \le \left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n(2n+1)}{2}} c_{25}^{\frac{n}{n+2}} \left(c_{27}(n+2)^{2n+1} + \frac{(n+2)^2}{nT_0'}\right) T_0'^{\frac{2}{n+2}} \cdot (2\Lambda)^2 := c_{29}, \tag{5.57}$$

这里

$$\begin{aligned} c_{27} =& c_{20}(200)^2 C_n^{\frac{n}{2}} (2\Lambda)^n + \frac{c_{20}}{n}(2\Lambda)^{n+2} C_n^{\frac{n}{n+2}} \\ & + c_{28}^{\frac{n+2}{2}} \cdot c_3 (200)^2 C_n^{\frac{n}{n+2}} \frac{2}{n+2} + c_{28}^{\frac{n+2}{2}} \cdot \frac{c_{20}}{n}(2\Lambda)^2 C_n^{\frac{n}{n+2}} \frac{2}{n+2}, \end{aligned}$$

$$c_{28} = \left(\frac{c_{20}(200)^2 C_n^{\frac{n}{n+2}} \cdot \frac{n}{n+2} + \frac{c_{20}}{n}(2\Lambda)^2 C_n^{\frac{n}{n+2}} \frac{n}{n+2}}{3n+2}\right)^{\frac{n}{n+2}}.$$

根据(5.56)和(5.57)可知, 在$t \in [\frac{T_0'}{2}, T_0']$上有

$$|A|^2(x,t) \le c_{28}^2 100^2 + \frac{c_{29}}{n} := c_{30}. \tag{5.58}$$

类似于定理6的证明中的第二步, 在$t \in [0, T_{\max})$上有

$$|H|^2_{\max}(t) \ge n^n \omega_n V^{-1} := c_{31}, \tag{5.59}$$

并且

$$diam(M_t) \le c_{11}(2\Lambda)^{n-1} V^{\frac{2}{n+2}} := c_{32}, \tag{5.60}$$

这里$V = Vol(M_0)$. 则在$t \in [\frac{T_0'}{2}, T_3']$上有

$$|\nabla H|^2 \le \frac{3n^2}{2(n-1)} \cdot \left(\frac{c_{26}^2}{\left(t-\frac{T_0'}{2}\right)} + c_3 c_{30} c_{26}^2\right)\varepsilon^2 := c_{33}^2 \varepsilon^2, \tag{5.61}$$

其中$T_3' = \min\{T_0', \frac{T_0'}{2} + \frac{1}{c_{17}c_{30}}\}$.

综合(5.59), (5.60)和(5.61)可知, 在T_3'时刻存在常数

$$\varepsilon_1' = \frac{c_{31}}{2n^{\frac{1}{2}} c_{30} c_{32} c_{33}},$$

使得若$\varepsilon \le \varepsilon_1'$, 则

$$|H|^2_{\min}(T_3') \ge \frac{c_{31}}{2}. \tag{5.62}$$

令

$$\varepsilon_2' = \begin{cases} \frac{c_{31}^{\frac{1}{2}}}{3\sqrt{2}c_{27}}, & n=3, \\ \frac{c_{31}^{\frac{1}{2}}}{[2n(n-1)]^{\frac{1}{2}}c_{27}}, & n \geq 4. \end{cases}$$

根据(5.28)和(5.39)可知, 若$\varepsilon \leq \min\{\varepsilon_1', \varepsilon_2', 100\}$, 则

$$|A|^2(T_3') \leq \frac{4}{9}|H|^2(T_3'), \quad n=3,$$

$$|A|^2(T_3') \leq c_{27}^2\varepsilon_2^2 + \frac{1}{n}|H|^2(T_3') \leq \frac{|H|^2(T_3')}{n-1}, \quad n \geq 4.$$

取$C_4 = \min\{\varepsilon_1', \varepsilon_2', 100\}$, 它是只依赖于$n$, p, V和Λ的常数. 根据平均曲率流的解的唯一性以及[2]中的收敛性定理, 我们便证明了以F_0为初始流形的平均曲率流在有限时间内收敛到一个圆点. 这就完成了定理7的证明.

根据平均曲率流的光滑性和解的唯一性, 我们得到定理8所述的微分球面定理. 通过对子流形的体积进行进一步估计, 我们证明定理9.

定理9的证明. 定理7中的正常数C_4依赖于$n, p, ||H||_{n+2}$和M_0的体积上界V. 根据平均曲率流体积的递减性质, M_t的体积有上界$Vol(M_t) \leq V$. 我们对$Vol(M_t)$进行进一步估计. 由于

$$||H||_{n+2} \geq Vol(M_0)^{\frac{1}{n+2}} \min_{M_0}|H|,$$

因此有

$$Vol(M_t) \leq Vol(M_0) \leq (\min_{M_0}|H|)^{-(n+2)}||H||_{n+2}^{n+2} := V'.$$

根据定理7, 可选取依赖于$n, p, ||H||_{n+2}$和$\min_{M_0}|H|$的正常数$C_6(n, p, V', ||H||_{n+2})$, 使得若$||\mathring{A}||_p < C_6$, 则平均曲率流在有限时间内收敛到一个圆点. 根据平均曲率流的光滑性和解的唯一性, M微分同胚于n维标准球面.

5.4 公开问题

设$F^{n+d}(c)$为具有非负常曲率c的$(n+d)$维完备单连通空间形式, M为$F^{n+d}(c)$中的n维可定向闭子流形. 1997年, K. Shiohama和H. W. Xu[58]证明了: 若$|A|^2 <$

$\alpha(n, H, c)$, 则$n \geq 4$时, M拓扑同胚于球面; $n = 3$时, M微分同胚于球面空间形式. 这里

$$\alpha(n, H, c) = nc + \frac{nH^2}{2(n-1)} - \frac{n-2}{2(n-1)}\sqrt{H^4 + 4(n-1)cH^2}.$$

H. W. Xu和E. T. Zhao[92]在适当的拼挤条件下证明了若干黎曼子流形的微分球面定理. 最近, H. W. Xu和J. R. Gu[85]将Shiohama-Xu的拓扑球面定理加强为微分球面定理. 受这些球面定理和B. Andrews与C. Baker[2]的平均曲率流收敛性定理的启发, 我们提出下述问题[44].

公开问题1. *设M为$F^{n+d}(c)$中的n维光滑闭子流形, 其中$n \geq 3$, $c > 0$. 设M_t是以M为初始子流形的平均曲率流的解. 若M满足*

$$|A|^2 < \alpha(n, H, c),$$

则以下结论之一成立:

(1) 该平均曲率流在有限时间$0 \leq t < T$上具有光滑解M_t, 并且当$t \to T$时, M_t一致收敛到一个圆点.

(2) 该平均曲率流在$0 \leq t < \infty$上具有光滑解M_t, 并且M_t在C^∞意义下收敛到$F^{n+d}(c)$中的光滑全测地子流形M_∞.

特别地, M微分同胚于n维标准球面.

1994年, K. Shiohama和H. W. Xu[57]在$||\mathring{A}||_n < C(n)$的条件下获得了$F^{n+d}(c)$中闭子流形的微分球面定理. 这里$c \geq 0$, $C(n)$是可显式表示的只与n相关的正常数. 由这个拓扑球面定理和本章证明的收敛性定理, 我们提出以下问题[44].

公开问题2. *设M为$\mathbb{R}^{n+d}$中的$n(\geq 2)$维光滑闭子流形, M_t是以M为初始子流形的平均曲率流的解. 则存在只与n相关的正常数$D(n)$, 使得如果M满足*

$$||\mathring{A}||_n < D(n),$$

那么该平均曲率流在有限时间$0 \leq t < T$上具有光滑解M_t, 并且当$t \to T$时, M_t一致收敛到一个圆点. 特别地, M微分同胚于n维标准球面.

对于任意的同胚于球面的4维紧致流形M, 我们希望证明存在从4维球面到欧氏空间的等距嵌入, 使得$||\mathring{A}||_4$充分小, 以满足定理7或者公开问题2的条件. 事实上, K. Shiohama和H. W. Xu[57]证明了: 对于欧氏空间中的任意4维紧致子流形M, 有$||\mathring{A}||_4 \geq C(\Sigma_{i=1}^3 \beta_i)^{1/4}$. 这里$C$为正常数, β_i为M的第i个Betti数, 其中$i=1,2,3$. 因此, 有可能可以将4维拓扑球面等距嵌入到欧氏空间中, 使得$||\mathring{A}||_4$充分小. 如果以上可以实现, 则M微分同胚于球面. 这或许可以提供一个证明4维光滑Poincaré猜想的途径, 这是目前几何与拓扑研究领域最具挑战性的问题之一.

一般地, 对于同伦球M, 可以尝试将其光滑嵌入到欧氏空间中, 使得$||\mathring{A}||_n$充分小. 可以运用本章中的任意余维数平均曲率流的收敛性定理, 来寻找从M到欧氏空间中的适当的嵌入, 从而解决M是否微分同胚于球面的问题.

公开问题3. *设M为$F^{n+d}(c)$中的n维光滑闭子流形, 其中$n \geq 2$, $c > 0$. 设M_t是以M为初始子流形的平均曲率流的解. 则存在只与n相关的正常数$E(n)$, 使得如果M满足*

$$||\mathring{A}||_n < E(n),$$

那么以下结论之一成立:

(1) 该平均曲率流在有限时间$0 \leq t < T$上具有光滑解M_t, 并且当$t \to T$时, M_t一致收敛到一个圆点.

(2) 该平均曲率流在$0 \leq t < \infty$上具有光滑解M_t, 并且M_t在C^∞意义下收敛到$F^{n+d}(c)$中的光滑全测地子流形M_∞.

特别地, M微分同胚于n维标准球面.

第六章　紧致子流形的微分球面定理

本章主要研究第k个Ricci曲率拼挤条件下黎曼子流形的微分球面定理. 球面定理是曲率与拓扑研究领域的重要研究方向之一, 这方面的研究有着悠久的历史. 上世纪六十年代, M. Berger[3]和W. Klingenberg[38]证明了著名的1/4拓扑球面定理, 在此之后许多杰出数学家的卓越工作[4, 8, 11, 56, 85, 92, 96]改进了这一结果. 1982年, R. Hamilton[27]首次运用Ricci流研究了Poincaré 猜想, 他证明: 任一具有正Ricci曲率的三维紧致黎曼流形微分同胚于$\mathbb{S}^n$. 近三十年来, 几何流的发展为球面定理的研究提供了一个新的有力工具. 最近, S. Brendle和R. Schoen[8]利用Ricci流将Berger和Klingenberg的结果改进为微分球面定理.

运用子流形上稳定流消没定理和S. Smale[62]证明的$n(\geq 5)$维广义Poincaré猜想, H. Lawson和J. Simons[39]证明了球面中紧致子流形的拓扑球面定理. K. Shiohama和H. W. Xu[58]改进并推广了H. Lawson和J. Simons的结果, 得到了非负常曲率空间形式中完备子流形的最佳拓扑球面定理.

我们运用曲率估计、稳定流消没定理和Ricci流收敛性定理, 证明了第k个Ricci曲率拼挤条件下的紧致黎曼子流形的微分球面定理.

6.1　主要结果

二十世纪七十年代, S. T. Yau[95]和T. Itoh[37]证明了截曲率拼挤条件下球面中极小子流形的刚性定理.

定理E.[95, 37]　*设M^n为球面$S^{n+p}(1)$中的n维可定向紧致子流形. 若M的截面曲率满足*

$$K_M \geq \min\left\{\frac{p-1}{2p-1}, \frac{n}{2(n+1)}\right\},$$

则M必为全测地子流形, 两个球面的乘积流形, 和Veronese子流形之一.

最近, H. W. Xu和J. R. Gu[26]证明了下述结果.

定理F.[26] *设M^n为球面$S^{n+p}(1)$中的n维可定向紧致子流形. 若M的截面曲率满足*

$$K_M \geq \frac{sgn(p-1)p}{2(p+1)},$$

则M必为全测地子流形, 两个球面的乘积流形, 和$S^4(1)$中的Veronese曲面之一.

近年来, 关于不同曲率拼挤条件下球面定理的研究取得了一系列重要进展. 运用Ricci流的相关理论, H. W. Xu和E. T. Zhao[92]证明了如下关于子流形的微分球面定理.

定理G.[92] *设M^n为逐点$\delta(>1/4)$拼挤的$n+p$维黎曼流形N^{n+p}中的$n(\geq 4)$维可定向的紧致子流形. 令$\overline{K}_{\max}(x) := \max_{\pi\subset T_xN}\overline{K}(x,\pi)$, 这里$\overline{K}(x,\pi)$是流形$N$在点$x\in N$处的关于切平面$\pi(\subset T_xN)$的截面曲率. 如果对任意的$x\in M$有*

$$S(x) < \frac{8\sqrt{2}}{3}\overline{K}_{\max}(x)(\delta-\frac{1}{4}),$$

那么M微分同胚于一个球面空间形式. 特别地, 如果M是单连通的, 那么M微分同胚于n维标准球面$\mathbb{S}^n$.

H. W. Xu和J. R. Gu[85]在数量曲率拼挤条件下证明了非负常曲率空间形式中完备子流形的最佳微分球面定理.

定理H.[85] *设M^n为$n+p$维非负常曲率空间形式N^{n+p}中的n维可定向完备子流形. 如果*

$$\lambda(M) := \sup_M\left(S-\frac{n^2}{n-1}H^2-2c\right)<0,$$

那么M微分同胚于标准球面$\mathbb{S}^n$.

H. W. Xu和G. X. Yang在截面曲率拼挤条件下证明了如下的拓扑球面定理.

定理I.[88] *设$\mathbb{F}^{n+p}(c)$为曲率为正常数c的$n+p$维空间形式, M^n为$\mathbb{F}^{n+p}(c)$中的$n\geq 4$维可定向紧致子流形. 若M的截面曲率满足*

$$K_M > \frac{c}{2}+\frac{n}{8}H^2,$$

则M拓扑同胚于标准球面.

最近, H. W. Xu, F. Huang和L. Tian[86, 87]分别证明了Ricci曲率和截面曲率拼挤条件下黎曼子流形的微分球面定理.

定理J.[86] 设M^n为曲率为正常数c的$n+p$维紧致空间形式$\mathbb{F}^{n+p}(c)$中的$n(\geq 4)$维可定向紧致子流形. 如果M的截面曲率满足

$$K_M > \frac{(n-2)c}{n} + \frac{n}{8}H^2,$$

那么M微分同胚于标准球面$\mathbb{S}^n$.

定理K.[87] 设M^n为黎曼流形N^{n+p}中的$n(\geq 4)$维紧致子流形, $\overline{K}(x,\pi)$为N在点$x \in N$处关于切平面$\pi(\subseteq T_xN)$的截面曲率. 令$\overline{K}_{\max}(x) := \max_{\pi\subseteq T_xN} \overline{K}(x,\pi)$, $\overline{K}_{\min}(x) := \min_{\pi\subseteq T_xN} \overline{K}(x,\pi)$. 如果$M$的Ricci曲率满足

$$Ric_M > [(n-\frac{2}{3})\overline{K}_{\max} - \frac{4}{3}\overline{K}_{\min}] + \frac{n^2}{8}H^2,$$

那么M微分同胚于一个球面空间形式. 特别地, 若M是单连通的, 则M微分同胚于n维标准球面$\mathbb{S}^n$.

本章证明第k个Ricci曲率拼挤条件下紧致黎曼子流形的微分球面定理.

定理10. 设M^n为黎曼流形N^{n+p}中的$n(\geq 4)$维紧致子流形, $\overline{K}(x,\pi)$为N在点$x \in N$处关于切平面$\pi(\subseteq T_xN)$的截面曲率. 令$\overline{K}_{\max}(x) := \max_{\pi\subseteq T_xN} \overline{K}(x,\pi)$, $\overline{K}_{\min}(x) := \min_{\pi\subseteq T_xN} \overline{K}(x,\pi)$. 如果$M$的第$k$个Ricci曲率满足

$$Ric_{(k)} > k[C_1(n)\overline{K}_{\max} - C_2(n)\overline{K}_{\min} + C_3(n)H^2],$$

其中常数$C_1(n) = \frac{n^2+5n-\frac{52}{3}}{n^2+5n-12}$, $C_2(n) = \frac{8}{3(n^2+5n-12)}$, $C_3(n) = \frac{(3n-5)n^2}{2(n-1)(n^2+5n-12)}$, k为某个小于$n-1$的正整数, 那么M微分同胚于一个球面空间形式. 特别地, 若M是单连通的, 则M微分同胚于n维标准球面$\mathbb{S}^n$.

特别地, 对于外围空间是非负常曲率空间形式$\mathbb{F}^{n+p}(c)$的情形, 我们证明

定理11. 设M^n为具有非负常曲率c的空间形式$\mathbb{F}^{n+p}(c)$中的$n(\geq 4)$维紧致子流形. 如果M的第k个$Ricci$曲率满足

$$Ric_{(k)} > k[C_4(n)c + C_5(n)H^2],$$

其中k为某个小于$n-1$的正整数, 常数$C_4(n) = \frac{n^2+5n-20}{n^2+5n-12}$, $C_5(n) = \frac{(3n-5)n^2}{2(n-1)(n^2+5n-12)}$, 那么$M$微分同胚于标准球面$\mathbb{S}^n$.

对于$k = 2$的情形, 我们给出如下的第2个Ricci曲率拼挤条件下的微分球面定理.

定理12. 设M^n为黎曼流形N^{n+p}中的$n(\geq 4)$维紧致子流形, $\overline{K}(x,\pi)$为N在点$x \in N$处关于切平面$\pi(\subseteq T_xN)$的截面曲率. 令$\overline{K}_{\max}(x) := \max_{\pi\subseteq T_xN}\overline{K}(x,\pi)$, $\overline{K}_{\min}(x) := \min_{\pi\subseteq T_xN}\overline{K}(x,\pi)$. 如果$M$的第2个$Ricci$曲率$Ric_{(2)}$满足

$$Ric_{(2)} > \left(2 - \frac{8}{3n}\right)\overline{K}_{\max} - \frac{4}{3n}\overline{K}_{\min} + \frac{n}{4}H^2,$$

那么M微分同胚于一个球面空间形式. 特别地, 若M是单连通的, 则M微分同胚于n维标准球面$\mathbb{S}^n$.

当外围空间是非负常曲率空间形式$\mathbb{F}^{n+p}(c)$时, 我们证明以下的球面定理.

定理13. 设M^n为具有非负常曲率c的空间形式$\mathbb{F}^{n+p}(c)$中的$n(\geq 4)$维可定向紧致子流形.
(1)如果M的第2个$Ricci$曲率满足

$$Ric_{(2)} > c + \frac{n^2}{8(n-2)}H^2,$$

那么M拓扑同胚于标准球面$\mathbb{S}^n$.
(2) 如果M的第2个$Ricci$曲率满足

$$Ric_{(2)} > \left(2 - \frac{4}{n}\right)c + \frac{n}{4}H^2,$$

那么M微分同胚于标准球面$\mathbb{S}^n$.

在定理13中, (1)改进并推广了定理I的结果, (2)推广了定理J的结果.

6.2 记号与引理

设M^n是等距进入到$n+p$维黎曼流形N^{n+p}中的n维子流形. 在本章中我们将使用如下的记号, 记$1 \leq i,j,k,\cdots \leq n$, $1 \leq A,B,C,\cdots \leq n+p$. 对任意取定的$x \in M \subseteq N$, 选取$N^{n+p}$中的局部单位正交标架场$\{e_A\}$, 使得$e_i$与$M$相切. 设$\{\omega_A\}$是$\{e_A\}$的对偶标架场. 记$Ric(e_i)$为$e_i$方向上的Ricci曲率, R为M的数量曲率. 记M和N上的黎曼曲率张量分别为Rm和$\overline{Rm}$, $h=\sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^{\alpha}\omega_i \otimes \omega_j \otimes e_\alpha$为$M$的第二基本形式. 则$M$的第二基本形式模长平方与平均曲率分别为

$$S := \sum_{\alpha,i,j}(h_{ij}^{\alpha})^2, \quad H := \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{\alpha}\big(\sum_{i} h_{ii}^{\alpha}\big)^2}.$$

对任意的$x \in M$, 记$K(\pi)$为M关于2-平面$\pi \subseteq T_xM$的截面曲率, $\overline{K}(\pi)$为N关于2-平面$\pi \subseteq T_xN$的截面曲率. 第k个Ricci曲率的定义如下.

定义6.1. *设M^n为n维黎曼流形, k为不大于$n-1$的正整数. M上点x处的第k个Ricci曲率定义为*

$$Ric_{(k)}(x) := \inf\Big\{\sum_{i=1}^{k} K(e\wedge e_i) \mid e, e_1, \cdots, e_k \in T_xM \text{为}(k+1)\text{个规范正交单位向量}\Big\},$$

其中$K(e\wedge e_i)$表示在点x处M关于e和e_i张成的2-平面的截面曲率.

1989年, M. Micallef和J. D. Moore[45]利用极小子流形的方法证明了逐点1/4-拼挤流形的拓扑球面定理. 其中他们使用了正迷向曲率的条件, 并证明了M具有正迷向曲率的充分必要条件是, 对于M上每一点处的任意单位正交4-标架$\{e_1.e_2,e_3,e_4\}$, 有

$$R_{1313}+R_{1414}+R_{2323}+R_{2424}-2R_{1234}>0,$$

其中R_{ijkl}表示M的黎曼曲率, $\{e_1.e_2,e_3,e_4\}$是M上的局部单位正交标架场.

利用Ricci流的方法, S. Brendle[6]证明了如下的Ricci流收敛性定理.

引理6.2.[6] *设M^n为$n(\geq 4)$维紧致黎曼流形. 如果对所有$\lambda \in [-1,1]$和所有单位正交4-标架$\{e_1.e_2,e_3,e_4\}$有*

$$R_{1313}+\lambda^2 R_{1414}+R_{2323}+\lambda^2 R_{2424}-2\lambda R_{1234}>0, \tag{6.1}$$

那么以g_0为初始度量的正规化Ricci流

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2Ric_{g(t)} + \frac{2}{n}r_{g(t)}g(t)$$

的解在$[0,+\infty)$上存在，并且当$t \to \infty$时，该Ricci流的解收敛到一个常曲率度量. 这里$r_{g(t)}$表示$g(t)$的数量曲率的平均.

由第k个Ricci曲率的定义, P. H. Wang和C. L. Shen[75]给出了下面的关系式.

引理6.3.[75] 设k_1和k_2是小于n的正整数，且$k_1 \le k_2$. 若M的第k_1个Ricci曲率满足$Ric_{(k_1)} > k_1 s$，则M的第k_2个Ricci曲率满足$Ric_{(k_2)} > k_2 s$，其中s为正常数.

H. Lawson、J. Simons[39]和Y. L. Xin[79]证明了如下的同调群消没定理.

引理6.4.[39, 79] 设M^n是$n+p$维空间形式$\mathbb{F}^{n+p}(c)$中的n维紧致子流形. k和l为满足$k+l=n$的正整数. 如果对M中的任意一点x的切空间的单位正交标架场$\{e_1.e_2,\ldots,e_n\}$，有

$$\sum_{j=k+1}^{n}\sum_{i=1}^{k}(2\parallel h(e_i,e_j)\parallel^2 - \langle h(e_i,e_i),h(e_j,e_j)\rangle) < klc,$$

那么

$$H_k(M,\mathbb{Z}) = H_l(M,\mathbb{Z}) = 0,$$

其中$H_i(M,\mathbb{Z})$为M的第i个整系数同调群.

利用这一结果，我们得到如下的引理，以证明子流形的单连通性. 这在下面的证明中将被用到.

引理6.5. 设M^n是具有非负常曲率c的空间形式$\mathbb{F}^{n+p}(c)$中的$n(\ge 4)$维紧致子流形. 如果M的第k个Ricci曲率满足

$$Ric_{(k)} > \frac{kn}{n+2}(c+H^2), \tag{6.2}$$

那么M是单连通的，其中k是某个小于$n-1$的正整数.

证明. 设$\{e_1.e_2,e_3,e_4\}$是M上单位正交的4-标架. 由Gauss公式

$$R_{ijkl}=\overline{K}_{ijkl}+\sum_{\alpha}(h^{\alpha}_{ik}h^{\alpha}_{jl}-h^{\alpha}_{il}h^{\alpha}_{jk}) \tag{6.3}$$

可知,

$$Ric(e_i)=(n-2)c+\sum_{\alpha}\sum_{j}(h^{\alpha}_{ii}h^{\alpha}_{jj}-(h^{\alpha}_{ij})^2).$$

由引理6.3可知

$$Ric_M\geq-\frac{n-1}{k}Ric_{(k)}.$$

另一方面, 由于

$$S=\sum_{\alpha}\left(\sum_{i\neq j}(h^{\alpha}_{ij})^2+\sum_{ij}(h^{\alpha}_{ii})^2\right)\geq\sum_{\alpha}\sum_{i\neq j}(h^{\alpha}_{ij})^2+nH^2,$$

故有

$$\sum_{\alpha}\sum_{j=2}^{n}(h^{\alpha}_{1j})^2\leq\frac{1}{2}\sum_{\alpha}\sum_{i\neq j}(h^{\alpha}_{ij})^2\leq\frac{1}{2}(S-nH^2).$$

由以上各式得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=2}^{n}(2\parallel h(e_1,e_j)\parallel^2-\langle h(e_1,e_1),h(e_j,e_j)\rangle)\\
=\ &2\sum_{\alpha}\sum_{j=2}^{n}(h^{\alpha}_{1j})^2-\sum_{\alpha}\sum_{j=2}^{n}h^{\alpha}_{11}h^{\alpha}_{jj}\\
=\ &\sum_{\alpha}\sum_{j=2}^{n}((h^{\alpha}_{1j})^2-h^{\alpha}_{11}h^{\alpha}_{jj})+\sum_{\alpha}\sum_{j=2}^{n}(h^{\alpha}_{1j})^2\\
\leq\ &-Ric(e_1)+(n-1)c+\frac{1}{2}(S-nH^2)\\
\leq\ &-\frac{n-1}{k}Ric_{(k)}+(n-1)c+\frac{1}{2}(S-nH^2).
\end{aligned}$$

由Guass公式和引理6.3可知，对于外围流形为具有非负常曲率c的空间形式$\mathbb{F}^{n+p}(c)$ 的情形，有

$$-S+n^2H^2+n(n-1)c\geq R\geq \frac{n(n-1)}{k}Ric_{(k)}.$$

因此

$$S\leq -\frac{n(n-1)}{k}Ric_{(k)}+n(n-1)c+n^2H^2.$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=2}^{n}\left(2\parallel h(e_1,e_j)\parallel^2-\langle h(e_1,e_1),h(e_j,e_j)\rangle\right)\\
\leq\ & -\frac{n-1}{k}Ric_{(k)}+(n-1)c\\
&+\frac{1}{2}\left[-\frac{n(n-1)}{k}Ric_{(k)}+n^2H^2+n(n-1)c-nH^2\right]\\
=\ & -\frac{(n-1)(n+2)}{2k}Ric_{(k)}+\frac{(n+2)(n-1)}{2}c+\frac{n(n-1)}{2}H^2\\
<\ & (n-1)c.
\end{aligned}$$

由此可知$H_1(M,\mathbb{Z})=0$，故不存在稳定1-流. 由于在每一非平凡自由同伦类中存在一条长度极小曲线，所以M是单连通的. 这就证明了引理的结论.

受K. Shiomaha和H. W. Xu[58]的启发，我们证明如下的同调群消没定理.

引理6.6. *设M^n为具有非负常曲率c的空间形式$\mathbb{F}^{n+p}(c)$中的$n(\geq 4)$维紧致子流形，k和q为满足$k\leq q\leq n-k$的正整数. 如果M的第k个Ricci曲率满足$Ric_{(k)}>\frac{kc}{2}+\frac{n^2}{8(n-k)}H^2$，那么*

$$H_q(M,Z)=0,$$

其中$H_i(M,\mathbb{Z})$为M的第i个整系数同调群.

证明. 由Gauss公式(6.3)可知

$$\sum_\alpha (h_{ij}^\alpha)^2=c+\sum_\alpha h_{ii}^\alpha h_{jj}^\alpha-R_{ijij}.$$

从而有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=q+1}^{n}\sum_{i=1}^{q}[2|h(e_i,e_j)|^2-\langle h(e_i,e_i),h(e_j,e_j)\rangle] \\
=\ & 2\sum_{\alpha}\sum_{j=q+1}^{n}\sum_{i=1}^{q}((h_{ij}^{\alpha})^2-h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{\alpha})+\sum_{\alpha}\sum_{j=q+1}^{n}\sum_{i=1}^{q}h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{\alpha} \\
=\ & 2\sum_{j=q+1}^{n}\sum_{i=1}^{q}(c-R_{ijij})+\sum_{\alpha}\sum_{j=q+1}^{n}h_{jj}^{\alpha}\sum_{i=1}^{q}h_{ii}^{\alpha} \\
\le\ & 2q(n-q)c-2\sum_{j=q+1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{q}R_{ijij}\right)+\frac{n^2}{4}H^2 \\
\le\ & 2q(n-q)c-2\sum_{j=q+1}^{n}Ric_{(q)}+\frac{n^2}{4}H^2 \\
=\ & 2q(n-q)c-2(n-q)Ric_{(q)}+\frac{n^2}{4}H^2.
\end{aligned}$$

引理6.3表明, 由$Ric_{(k)}>\frac{kc}{2}+\frac{n^2}{8(n-k)}H^2$可以推出

$$Ric_{(q)}>\frac{qc}{2}+\frac{q}{k}\cdot\frac{n^2}{8(n-k)}H^2\ge\frac{qc}{2}+\frac{n^2}{8(n-q)}H^2$$

对所有的$k\le q\le n-k$成立. 因此由以上可知

$$\sum_{j=q+1}^{n}\sum_{i=1}^{q}[2|h(e_i,e_j)|^2-\langle h(e_i,e_i),h(e_j,e_j)\rangle]<q(n-q)c.$$

即证明了引理6.6的结论.

6.3 关于第k个Ricci曲率的微分球面定理

本节我们证明第k个Ricci曲率拼挤条件下的微分球面定理, 即定理10与定理11.

定理10的证明. 由引理6.3可知, 只需要证明$k=n-2$时定理的结论成立. 设$\{e_1.e_2,e_3,e_4\}$是M上单位正交的4-标架. 由Gauss公式(6.3)可知

$$\begin{aligned}
R_{ijij} &= \overline{K}_{ijij}+\sum_{\alpha}(h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{\alpha}-(h_{ij}^{\alpha})^2) \\
&\le \overline{K}_{\max}+\sum_{\alpha}(h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{\alpha}-(h_{ij}^{\alpha})^2). \qquad (6.4)
\end{aligned}$$

由第$n-2$个Ricci曲率的定义以及不等式(6.4), 我们得到

$$
\begin{aligned}
& R_{1313}+\lambda^2R_{1414}+R_{2323}+\lambda^2R_{2424}-2\lambda R_{1234}\\
\geq\ & \frac{1}{2}\left[R_{1313}+R_{2323}+(R_{3131}+R_{3232})\right]\\
& +\frac{\lambda^2}{2}\left[R_{1414}+R_{2424}+(R_{4141}+R_{4242})\right]-2\lambda R_{1234}\\
\geq\ & \frac{1}{2}\Big(3Ric_{(n-2)}-\sum_{j\neq1,2,3}R_{1j1j}-\sum_{j\neq1,2,3}R_{2j2j}-\sum_{j\neq1,2,3,4}R_{3j3j}\Big)\\
& +\frac{\lambda^2}{2}\Big(3Ric_{(n-2)}-\sum_{j\neq1,2,4}R_{1j1j}-\sum_{j\neq1,2,4}R_{2j2j}-\sum_{j\neq1,2,3,4}R_{4j4j}\Big)\\
& -2\lambda\overline{K}_{1234}-2\lambda\sum_{\alpha}(h^{\alpha}_{13}h^{\alpha}_{24}-h^{\alpha}_{14}h^{\alpha}_{23})\\
=\ & \frac{1}{2}\Big\{3Ric_{(n-2)}-[2(n-3)+(n-4)]\overline{K}_{\max}\\
& -\sum_{\alpha}\sum_{j\neq1,2,3}h^{\alpha}_{11}h^{\alpha}_{jj}-\sum_{\alpha}\sum_{j\neq1,2,3}h^{\alpha}_{22}h^{\alpha}_{jj}-\sum_{\alpha}\sum_{j\neq1,2,3,4}h^{\alpha}_{33}h^{\alpha}_{jj}\\
& +\sum_{\alpha}\sum_{j\neq1,2,3}((h^{\alpha}_{1j})^2+(h^{\alpha}_{2j})^2)+\sum_{\alpha}\sum_{j\neq1,2,3,4}(h^{\alpha}_{3j})^2\Big\}\\
& +\frac{\lambda^2}{2}\Big\{3Ric_{(n-2)}-[2(n-3)+(n-4)]\overline{K}_{\max}\\
& -\sum_{\alpha}\sum_{j\neq1,2,4}h^{\alpha}_{11}h^{\alpha}_{jj}-\sum_{\alpha}\sum_{j\neq1,2,4}h^{\alpha}_{22}h^{\alpha}_{jj}-\sum_{\alpha}\sum_{j\neq1,2,3,4}h^{\alpha}_{44}h^{\alpha}_{jj}\\
& +\sum_{\alpha}\sum_{j\neq1,2,4}((h^{\alpha}_{1j})^2+(h^{\alpha}_{2j})^2)+\sum_{\alpha}\sum_{j\neq1,2,3,4}(h^{\alpha}_{4j})^2\Big\}\\
& -\sum_{\alpha}((h^{\alpha}_{14})^2+(h^{\alpha}_{24})^2)-\lambda^2\sum_{\alpha}((h^{\alpha}_{13})^2+(h^{\alpha}_{23})^2)-(1+\lambda^2)|\overline{K}_{1234}|\\
\geq\ & \frac{1}{2}\Big\{3Ric_{(n-2)}-[2(n-3)+(n-4)]\overline{K}_{\max}\\
& -\sum_{\alpha}\sum_{j\neq1,2,3}(h^{\alpha}_{11}+h^{\alpha}_{22}+h^{\alpha}_{33})h^{\alpha}_{jj}+\sum_{\alpha}h^{\alpha}_{33}h^{\alpha}_{44}-\sum_{\alpha}((h^{\alpha}_{14})^2+(h^{\alpha}_{24})^2)\Big\}\\
& +\frac{\lambda^2}{2}\Big\{3Ric_{(n-2)}-[2(n-3)+(n-4)]\overline{K}_{\max}\\
& -\sum_{\alpha}\sum_{j\neq1,2,4}(h^{\alpha}_{11}+h^{\alpha}_{22}+h^{\alpha}_{44})h^{\alpha}_{jj}+\sum_{\alpha}h^{\alpha}_{44}h^{\alpha}_{33}-\sum_{\alpha}((h^{\alpha}_{13})^2+(h^{\alpha}_{23})^2)\Big\}\\
& -(1+\lambda^2)|\overline{K}_{1234}|.
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

对于上式中的$\sum_\alpha h^\alpha_{33}h^\alpha_{44}$，记$S_\alpha := \sum_{i,j} h^\alpha_{ij})^2$，则

$$(\sum_i h^\alpha_{ii})^2 = (n-1)\left[\sum_i (h^\alpha_{ii})^2 + \sum_{i\neq j}(h^\alpha_{ij})^2 + \frac{(\sum_i h^\alpha_{ii})^2}{n-1} - S_\alpha\right].$$

另一方面，

$$\begin{aligned}(\sum_i h^\alpha_{ii})^2 &\leq (n-1)\left[(h^\alpha_{33}+h^\alpha_{44})^2 + \sum_{i\neq 3,4}(h^\alpha_{ii})^2\right]\\ &= (n-1)[2h^\alpha_{33}h^\alpha_{44} + \sum_i (h^\alpha_{ii})^2].\end{aligned}$$

因此我们有

$$2h^\alpha_{33}h^\alpha_{44} \geq \sum_{i\neq j}(h^\alpha_{ij})^2 + \frac{(\sum_{i=1}^n h^\alpha_{ii})^2}{n-1} - S_\alpha. \tag{6.6}$$

将(6.6)代入(6.5)得到

$$\begin{aligned}&R_{1313} + \lambda^2 R_{1414} + R_{2323} + \lambda^2 R_{2424} - 2\lambda R_{1234}\\ \geq\ &\frac{1}{2}\Big\{3Ric_{(n-2)} - [2(n-3)+(n-4)]\overline{K}_{\max}\\ &-\sum_\alpha\sum_{j\neq 1,2,3}(h^\alpha_{11}+h^\alpha_{22}+h^\alpha_{33})h^\alpha_{jj} - \sum_\alpha((h^\alpha_{14})^2+(h^\alpha_{24})^2)\\ &+\sum_\alpha \frac{1}{2}\Big[\sum_{i\neq j}(h^\alpha_{ij})^2 + \frac{(\sum_{i=1}^n h^\alpha_{ii})^2}{n-1} - S_\alpha\Big]\Big\}\\ &+\frac{\lambda^2}{2}\Big\{3Ric_{(n-2)} - [2(n-3)+(n-4)]\overline{K}_{\max}\\ &-\sum_\alpha\sum_{j\neq 1,2,4}(h^\alpha_{11}+h^\alpha_{22}+h^\alpha_{44})h^\alpha_{jj} - \sum_\alpha((h^\alpha_{13})^2+(h^\alpha_{23})^2)\\ &+\sum_\alpha \frac{1}{2}\Big[\sum_{i\neq j}(h^\alpha_{ij})^2 + \frac{(\sum_{i=1}^n h^\alpha_{ii})^2}{n-1} - S_\alpha\Big]\Big\}\\ &-(1+\lambda^2)|\overline{K}_{1234}|\\ \geq\ &\frac{1+\lambda^2}{2}\Big\{3Ric_{(n-2)} - (3n-10)\overline{K}_{\max} - \frac{n^2H^2}{4} + \frac{1}{2}\Big(\frac{n^2H^2}{n-1} - S\Big)\Big\}\\ &-(1+\lambda^2)|\overline{K}_{1234}|.\end{aligned} \tag{6.7}$$

由Gauss公式(6.3)以及引理6.3可知

$$-S + n^2H^2 + n(n-1)\overline{K}_{\max} \geq R \geq \frac{n(n-1)}{n-2}Ric_{(n-2)}.$$

因此

$$-S \geq \frac{n(n-1)}{n-2}Ric_{(n-2)} - n(n-1)\overline{K}_{\max} - n^2H^2. \tag{6.8}$$

将(6.8)和Berger不等式

$$|\overline{K}_{1234}| \leq \frac{2}{3}(\overline{K}_{\max} - \overline{K}_{\min}) \tag{6.9}$$

代入(6.7), 得到

$$\begin{aligned}
& R_{1313} + \lambda^2 R_{1414} + R_{2323} + \lambda^2 R_{2424} - 2\lambda R_{1234} \\
\geq\ & \frac{1+\lambda^2}{2}\Big\{3Ric_{(n-2)} - (3n - \frac{26}{3})\overline{K}_{\max} + \frac{4}{3}\overline{K}_{\min} - \frac{n^2H^2}{4} \\
& + \frac{1}{2}\Big[\frac{n^2H^2}{n-1} + \frac{n(n-1)}{n-2}Ric_{(n-2)} - n(n-1)\overline{K}_{\max} - n^2H^2\Big]\Big\} \\
=\ & \frac{1+\lambda^2}{4}\Big\{\Big[6 + \frac{n(n-1)}{n-2}\Big]Ric_{(n-2)} \\
& -(n^2 + 5n - \frac{52}{3})\overline{K}_{\max} + \frac{8}{3}\overline{K}_{\min} - \frac{n^2(3n-5)}{2(n-1)}H^2\Big\} \\
>\ & 0.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

上式最后一个不等号处, 我们应用了第k个Ricci曲率假设条件(6.1).

由引理6.2可知, M微分同胚于一个球面空间形式. 特别地, 若M是单连通的, 则M微分同胚于n维标准球面$\mathbb{S}^n$. 这就证明了定理10.

由定理10和引理6.5的结论, 我们证明定理11.

定理11的证明. 若外围空间是具有非负常曲率c的空间形式$\mathbb{F}^{n+p}(c)$, 则定理10中的拼挤条件(6.1)即为定理11中的拼挤条件(6.1)

$$Ric_{(k)} > k[C_4(n)c + C_5(n)H^2],$$

其中常数$C_4(n) = \frac{n^2+5n-20}{n^2+5n-12}$, $C_5(n) = \frac{(3n-5)n^2}{2(n-1)(n^2+5n-12)}$. 于是由定理10的结论可知, 定理11中所述的子流形M微分同胚于球面空间形式. 由于$C_4(n) > \frac{n}{n+2}$, $C_5(n) > \frac{n}{n+2}$, 故有

$$Ric_{(k)} > k[C_4(n)c + C_5(n)H^2] > \frac{kn}{n+2}(c + H^2).$$

则由引理6.5可知M是单连通的. 这就证明了M微分同胚于标准球面. 定理证毕.

6.4 关于第2个Ricci曲率的微分球面定理

本节我们完成第2个Ricci曲率拼挤条件下的球面定理的证明, 即定理12和定理13.

定理12的证明. 设$\{e_1.e_2,e_3,e_4\}$为M上单位正交的4-标架. 由Gauss公式(6.3)我们得到

$$\begin{aligned}
& R_{1313}+\lambda^2R_{1414}+R_{2323}+\lambda^2R_{2424}-2\lambda R_{1234} \\
= & (R_{1313}+R_{2323})+\lambda^2(R_{1414}+R_{2424}) \\
& -2\lambda[\overline{K}_{1234}+\sum_\alpha(h^\alpha_{13}h^\alpha_{24}-h^\alpha_{14}h^\alpha_{23})].
\end{aligned} \tag{6.11}$$

由第2个Ricci曲率$Ric_{(2)}$的定义可知

$$R_{1313}+R_{2323}\geq Ric_{(2)},\quad R_{1414}+R_{2424}\geq Ric_{(2)}. \tag{6.12}$$

将(6.12)代入(6.11)得到

$$\begin{aligned}
& R_{1313}+\lambda^2R_{1414}+R_{2323}+\lambda^2R_{2424}-2\lambda R_{1234} \\
\geq & (1+\lambda^2)Ric_{(2)}-2\lambda\overline{K}_{1234}-2\lambda\sum_\alpha(h^\alpha_{13}h^\alpha_{24}-h^\alpha_{14}h^\alpha_{23}) \\
\geq & (1+\lambda^2)Ric_{(2)}-(1+\lambda^2)|\overline{K}_{1234}| \\
& -\frac{1}{2}(1+\lambda^2)\sum_\alpha\sum_{i=3}^n((h^\alpha_{1i})^2+(h^\alpha_{2i})^2).
\end{aligned} \tag{6.13}$$

对于(6.13)中的最后一项, 有

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}(1+\lambda^2)\sum_\alpha\sum_{i=3}^n((h^\alpha_{1i})^2+(h^\alpha_{2i})^2) \\
\geq & -\frac{1}{2}(1+\lambda^2)\Big[\sum_{i=3}^n(\sum_\alpha h^\alpha_{11}h^\alpha_{ii}-R_{1i1i}+\overline{K}_{\max}) \\
& +\sum_{i=3}^n(\sum_\alpha h^\alpha_{22}h^\alpha_{ii}-R_{2i2i}+\overline{K}_{\max})\Big] \\
= & -\frac{1}{2}(1+\lambda^2)\Big[\sum_\alpha(h^\alpha_{11}+h^\alpha_{22})(\sum_{i=3}^n h^\alpha_{ii}) \\
& -\sum_{i=3}^n(R_{1i1i}+R_{2i2i})+2(n-2)\overline{K}_{\max}\Big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq -\frac{1}{2}(1+\lambda^2)\cdot\frac{1}{4}n^2H^2\\
&\quad+\frac{1}{2}(1+\lambda^2)\left[\sum_{i=3}^{n}(R_{1i1i}+R_{2i2i})-2(n-2)\overline{K}_{\max}\right]\\
&\geq -\frac{1}{2}(1+\lambda^2)\cdot\frac{1}{4}n^2H^2\\
&\quad+\frac{1}{2}(1+\lambda^2)\left[(n-2)Ric_{(2)}-2(n-2)\overline{K}_{\max}\right]\\
&= -(1+\lambda^2)\cdot\frac{1}{8}n^2H^2\\
&\quad+(1+\lambda^2)\left[\frac{n-2}{2}Ric_{(2)}-(n-2)\overline{K}_{\max}\right].
\end{aligned}
\tag{6.14}
$$

将(6.14)和Berger不等式(6.9)代入(6.13), 得到

$$
\begin{aligned}
&R_{1313}+\lambda^2R_{1414}+R_{2323}+\lambda^2R_{2424}-2\lambda R_{1234}\\
\geq\ &(1+\lambda^2)Ric_{(2)}-(1+\lambda^2)\cdot\frac{2}{3}(\overline{K}_{\max}-\overline{K}_{\min})\\
&-(1+\lambda^2)\cdot\frac{1}{8}n^2H^2+(1+\lambda^2)\left[\frac{n-2}{2}Ric_{(2)}-(n-2)\overline{K}_{\max}\right]\\
=\ &(1+\lambda^2)\left[\frac{n}{2}Ric_{(2)}-\left(n-\frac{4}{3}\right)\overline{K}_{\max}+\frac{2}{3}\overline{K}_{\min}-\frac{n^2}{8}H^2\right]\\
>\ &0.
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

这里我们在(6.15)中最后一个不等号处应用了第2个Ricci曲率假设条件(6.1).

由引理6.2可知, M微分同胚于球面空间形式. 特别地, 若M是单连通的, 则M微分同胚于n维标准球面$\mathbb{S}^n$. 定理证毕.

定理13的证明. (1) 当M的第2个Ricci曲率$Ric_{(2)}$满足拼挤条件(6.1)时, 由引理6.6可知, 对所有的整数$q\in[2,n-2]$有

$$H_q(M,Z)=0.$$

则由覆盖系数定理可知, $H_{n-1}(M,Z)$是无挠的, 进而根据Pioncaré对偶定理得到$H_1(M,Z)$也是无扰的. 于是根据Myers定理, $\Pi_1(M)$是有限的, 从而得到$H_1(M,Z)=0$. 记$\widetilde{M}$为M的黎曼万有覆盖, 则我们可以设$\widetilde{M}$为空间形式$\mathbb{F}^{n+p}(c)$中的子流形, 从而$\widetilde{M}$是一个同调球. 由于$\widetilde{M}$是单连通的, 所以$\widetilde{M}$又是一个拓扑

球. 进而由D. Sjerve[61]的结论可知M是单连通的. 于是证得M拓扑同胚于n维标准球面.

(2) 当外围流形为非负常曲率空间形式$\mathbb{F}^{n+p}(c)$, 定理12中的拼挤条件(6.1)即为定理13中的条件(6.1)

$$Ric_{(2)} > \left(2-\frac{4}{n}\right)c+\frac{n}{4}H^2.$$

于是由定理12可知, M微分同胚于一个球面空间形式. 另一方面, 由于

$$Ric_{(2)} > \left(2-\frac{4}{n}\right)c+\frac{n}{4}H^2 \geq c+\frac{n^2}{8(n-2)}H^2,$$

故由(1)中的结论可知, M拓扑同胚于n维标准球面. 综合以上可知, M微分同胚于标准球面$\mathbb{S}^n$. 这就证明了定理13.

由定理13(1)可以得到以下的推论, 这一推论改进并推广了定理I的结果.

推论6.7. *设M^n为具有非负常曲率c的空间形式$\mathbb{F}^{n+p}(c)$中的$n(\geq 4)$维可定向紧致子流形. 如果M的截面曲率K_M满足*

$$K_M > \frac{c}{2}+\frac{n^2}{16(n-2)}H^2,$$

那么M微分同胚于标准球面$\mathbb{S}^n$.

由定理13(2)和引理6.3可以得到下面的推论, 这一推论推广了定理J中的微分球面定理.

推论6.8. *设M^n为具有非负常曲率c的空间形式$\mathbb{F}^{n+p}(c)$中的$n(\geq 4)$维可定向紧致子流形. 如果M的截面曲率K_M满足*

$$K_M > \left(1-\frac{2}{n}\right)c+\frac{n}{8}H^2,$$

那么M微分同胚于标准球面$\mathbb{S}^n$.

参考文献

[1] B. Andrews, Positively curved surfaces in the three-sphere, Proc. ICM. II(2002), 221-230.

[2] B. Andrews and C. Baker, Mean curvature flow of pinched submanifolds to spheres, *J. Diff. Geom.*, **85**(2010), 357-395.

[3] M. Berger, Les variétés Riemanniennes 1/4-pincées, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **14**(1960), 161-170.

[4] C. Böhm and B. Wilking, Manifolds with positive curvature operator are space forms, *Ann. Math.*, **167**(2008), 1079-1097.

[5] K. Brakke, The motion of a surface by its mean curvature, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1978.

[6] S. Brendle, A general convergence result for the Ricci flow in higher dimensions, *Duke Math. J.*, **145**(2008), 585-601.

[7] S. Brendle, Ricci Flow and the Sphere Theorem, Graduate Studies in Mathematics, Vol.**111**, Americam Mathematical Society, 2010.

[8] S. Brendle and R. Schoen, Manifolds with 1/4-pinched curvature are space forms, *J. Amer. Math. Soc.*, **22**(2009), 287-307.

[9] S. Brendle and R. Schoen, Classification of manifolds with weakly 1/4-pinched curvatures, *Acta Math.*, **200**(2008), 1-13.

[10] H. D. Cao, B. L. Chen and X. P. Zhu, Recent developments on Hamilton's Ricci flow, Surveys in Differential Geometry, Vol.**12**, 2008.

[11] J. Cheeger and D. Gromoll, On the structure of complete manifolds of nonnegative sectional curvature, *Ann. Math.*, **96**(1972), 413-443.

[12] B. L. Chen and X. P.zhu, Complete Riemannian manifolds with pointwise pinched curvature, *Invent. Math.*, **140**(2000), 423-452.

[13] B. Y. Chen, On a theorem of Fenchel-Borsuk-Willmore-Chern-Lashof, *Math. Ann.*, **194**(1971), 19-26.

[14] H. W. Chen, Pointwise 1/4 pinched 4-manifolds, *Ann. Global Anal. Geom.*, **9**(1991), 161-176.

[15] J. Y. Chen and W. Y. He, A note on singular time of mean curvature flow, *Math. Z.*, **266**(2010), 921-931.

[16] J. Y. Chen and J. Y. Li, Singularity of mean curvature flow of Lagrangian submanifolds, *Invent. Math.*, **156**(2004), 25-51.

[17] X. Z. Chen and Y. B. Shen, A note on the mean curvature flow in Riemannian manifolds, *Acta Math. Sci. (Ser. B)*, **30**(2010), 1053-1064.

[18] Y. G. Chen, Y. Giga and S. Goto, Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations, *J. Diff. Geom.*, **33**(1991), 749-786.

[19] S. S. Chern, M. do Carmo and S. Kobayashi, Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length, Functional analysis and related fields, 59-75, Springer, New York, 1970.

[20] B. Chow, P. Lu and L. Ni, Hamilton's Ricci flow, Graduate Studies in Mathematics 77, Science Press, New York, 2006.

[21] X. Z. Dai, G. F. Wei and R. G. Ye, Smoothing Riemannian metrics with Ricci curvature bounds, *Manu. Math.*, **90**(1996), 49-61.

[22] K. Ecker and G. Huisken, Interior estimates for hypersurfaces moving by mean curvature, *Invent. Math.*, **105**(1991), 547-569.

[23] N. Ejiri, Compact minimal submanifolds of a sphere with positive Ricci curvature, *J. Math. Soc. Japan*, **31**(1979), 251-256.

[24] L. C. Evans and J. Spruck, Motion of level sets by mean curvature I, *J. Diff. Geom.*, **33**(1991), 635-681.

[25] K. Grove and K. Shiohama, A generalized sphere theorem, *Ann. Math.*, **106**(1977), 201-211.

[26] J. R. Gu and H. W. Xu, On Yau rigidity theorem for minimal submanifolds in spheres, arXiv: math.DG/1102.5732.

[27] R. Hamilton, Three-manifolds with positive Ricci curvature, *J. Diff. Geom.*, **17**(1982), 255-306.

[28] R. Hamilton, Four-manifolds with positive isotropic curvature, *Comm. Anal. Geom.*, **5**(1997), 1-92.

[29] R. Hamilton, The Ricci flow on surfaces, *Math. General Relaticity, Contemp. Math.*, **71**(1988), 237-261.

[30] P. Hartman, Oscillation criteria for self-adjoint second-order differential systems and principle sectional curvature, *J. Diff. Equations*, **34**(1979), 326-338.

[31] E. Hebey, Nonlinear Analysis on Manifolds: Sobolev Spaces and Inequalities, Courant Institute of Mathematical Science, Vol.5, 2000.

[32] D. Hoffman and J. Spruck, Sobolev and isoperimetric inequalities for Riemannian submanifolds, *Comm. Pure Appl. Math.*, **27**(1974), 715–727.

[33] G. Huisken, Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres, *J. Diff. Geom.*, **20**(1984), 237-266.

[34] G. Huisken, Contracting convex hyperserfaces in Riemannian manifolds by their mean curvature, *Invent. Math.*, **84**(1986), 463-480.

[35] G. Huisken, Deforming hyperserfaces of the sphere by their mean curvature, *Math. Z.*, **195**(1987), 205-219.

[36] G. Huisken and C. Sinestrari, Mean curvature flow singularities for mean convex surfaces, *Calc. Var. Partial Diff. Equations*, **8**(1999), 1-14.

[37] T. Itoh, Addendum to my paper " On veronese manifolds" , *J. Math. Soc. Japan.*, **30**(1978), 73-74.

[38] W. Klingenberg, Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit nach oben beschränkter Krümmung, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **60**(1962), 49-59.

[39] H. Lawson and J. Simons, On stable currents and their application to global problems in real and complex geometry, *Ann. Math.*, **98**(1973), 427-450.

[40] N. Le and N. Šešum, On the extension of the mean curvature flow, *Math. Z.*, **267**(2011), 583-604.

[41] N. Le and N. Šešum, The mean curvature at the first singular time of the mean curvature flow, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **27**(2010), 1441-1459.

[42] A. M. Li and J. M. Li, An intrinsic rigidity theorem for minimal submanifolds in a sphere, *Arch. Math.*, **58**(1992), 582-594.

[43] Y. Li, On an extension of the H^k mean curvature flow, arXiv: math.DG/0910.1135.

[44] K. F. Liu, H. W. Xu, F. Ye and E. T. Zhao, The extension and convergence of mean curvature flow in higher codimension, arXiv: math.DG/1104.0971.

[45] M. Micallef and J. D. Moore, Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes, *Ann. Math.*, **127**(1988), 199-227.

[46] J. Moser, A Harnack inequality for parabolic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **17**(1964), 101-134.

[47] M. Okumura, Submanifolds and a pinching problem on the second fundamental tensors, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **178**(1973), 285-291.

[48] M. Okumura, Hypersurfaces and a pinching problem on the second fundamental tensor, *Amer. J. Math.*, **96**(1974), 207-213.

[49] S. L. Pan and J. N. Yang, On a non-local perimeter-preserving curve evolution problem for convex plane curves, *Manuscripta Math.*, **127**(2008), 469-484.

[50] H. E. Rauch, A contribution to differential geometry in the large, *Ann. Math.*, **54**(1951), 38-55.

[51] N. Šešum, Curvature tensor under the Ricci flow, *Amer. J. Math.*, **127**(2005), 1315-1324.

[52] C. L. Shen, A global pinching theorem of minimal hypersurfaces in the sphere, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **105**(1989), 192-198.

[53] Y. B. Shen, On intrinsic rigidity for minimal submanifolds in a sphere, *Science in China, Ser. A*, **32**(1989), 769-781.

[54] Z. M. Shen, On complete manifolds of nonnegative k-th Ricci curvature, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **338**(1993), 289-310.

[55] W. M. Sheng and X. J. Wang, Regularity and singularity in the mean curvature flow, Trends in partial differential equations, 399-436, Adv. Lect. Math. (ALM), 10, International Press, Somerville, 2010.

[56] K. Shiohama, Sphere theorems, Handbook of Differential Geometry, Vol. 1, F.J.E. Dillen and L.C.A. Verstraelen (eds.), Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2000.

[57] K. Shiohama and H. W. Xu, Rigidity and sphere theorems for submanifolds, *Kyushu J. Math.*, I, **48**(1994), 291–306; II, **54**(2000), 103-109.

[58] K. Shiohama and H. W. Xu, The topological sphere theorem for complete submanifolds, *Compositio Math.*, **107**(1997), 221-232.

[59] K. Shiohama and H. W. Xu, Lower bound for $L^{n/2}$ curvature norm and its application, *J. Geom. Anal.*, **7**(1997), 377-386.

[60] U. Simon, Submanifolds with parallel mean curvature vector and the curvature of minimal submanifolds of spheres, *Arch. Math. (Basel)*, **29**(1977), 106-112.

[61] D. Sjerve, Homology spheres which are covered by spheres, *J. London Math. Soc.*, **6**(1973), 333-336.

[62] S. Smale, Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four, *Ann. Math.*, **74**(1961), 391-406.

[63] K. Smoczyk, Longtime existence of the Lagrangian mean curvature flow, *Calc. Var. Partial Diff. Equations*, **20**(2004), 25-46.

[64] K. Smoczyk, Mean curvature flow in higher codimension - Introduction and survey, arXiv: math.DG/1104.3222.

[65] K. Smoczyk and M. T. Wang, Mean curvature flows of Lagrangian submanifolds with convex potentials, *J. Diff. Geom.*, **62**(2002), 243-257.

[66] M. Sugimoto, K. Shiohama, and H. Karcher, On the differentiable pinching problem, *Math. Ann.*, **195**(1971), 1-16.

[67] P. M. Topping, Relating diameter and mean curvature for submanifolds of Euclidean space, *Comment. Math. Helv.*, **83**(2008), 539-546.

[68] B. Wang, On the conditions to extend Ricci flow, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **8**(2008).

[69] M. T. Wang, Deforming area preserving diffeomorphism of surfaces by mean curvature flow, *Math. Res. Lett.*, **8**(2001), 651-661.

[70] M. T. Wang, Mean curvature flow of surfaces in Einstein four-manifolds, *J. Diff. Geom.*, **57**(2001), 301-338.

[71] M. T. Wang, Long-time existence and convergence of graphic mean curvature flow in arbitrary codimension, *Invent. math.*, **148**(2002), 525-543.

[72] M. T. Wang, Gauss maps of the mean curvature flow, *Math. Res. Lett.*, **10**(2003), 287-299.

[73] M. T. Wang, Subsets of Grassmannians preserved by mean curvature flows, *Comm. Anal. Geom.*, **13**(2005), 981-998.

[74] M. T. Wang, Lectures on mean curvature flows in higher codimensions, Handbook of geometric analysis, No. 1, 525-543, Adv. Lect. Math. (ALM), 7, International Press, Somerville, 2008.

[75] P. H. Wang and C. L. Shen, A sphere theorem with positive Ricci curvature and reverse volume pinching, *Acta Math. Sinica (Chin. Ser.)*, **50**(2007), 1135-1140.

[76] P. H. Wang and C. L. Shen, A differentiable sphere theorem with positive Ricci curvature, *Acta Math. Sinica (Chin. Ser.)*, **52**(2009), 1211-1218.

[77] H. Wu, Manifolds of partially positive curvature, *Indiana Univ. Math. J.*, **36** (1987), 525-548.

[78] H. Wu, C. L. Shen and Y. L. Yu, An Introduction to Riemannian Geometry, Beijing University Press, Beijing, 1989.

[79] Y. L. Xin, Application of integral currents to vanishing theorems, *Scient. Sinica (Ser. A)*, **27**(1984), 233-241.

[80] Y. L. Xin, Mean curvature flow with convex Gauss image, *Chin. Ann. Math. (Ser. B)*, **29**(2008), 121-134.

[81] H. W. Xu, Pinching theorems, global pinching theorems and eigenvalues for Riemannian submanifolds, Ph.D. dissertation, Fudan University, 1990.

[82] H. W. Xu, A rigidity theorem for submanifolds with parallel mean curvature in a sphere, *Arch. Math.*, **61**(1993), 489-496.

[83] H. W. Xu, $L_{n/2}$-pinching theorems for submanifolds with parallel mean curvature in a sphere, *J. Math. Soc. Japan*, **46**(1994), 503-515.

[84] H. W. Xu and J. R. Gu, A general gap theorem for submanifolds with parallel mean curvature in $\mathbb{R}^{n+p}$, *Comm. Anal. Geom.*, **15**(2007), 175-193.

[85] H. W. Xu and J. R. Gu, An optimal differentiable sphere theorem for complete manifolds, *Math. Res. Lett.*, **17**(2010), 1111-1124.

[86] H. W. Xu and F. Huang, Differentiable sphere theorems for certain submanifolds, preprint, 2010.

[87] H. W. Xu and L. Tian, A differentiable sphere theorem inspired by rigidity of minimal submanifolds, preprint, 2010.

[88] H. W. Xu and G. X. Yang, Topological sphere theorems for submanifolds with positive curvature, preprint, 2008.

[89] H. W. Xu and F. Ye, Differentiable sphere theorems for submanifolds of positive k-th Ricci curvature, preprint, 2011.

[90] H. W. Xu, F. Ye and E. T. Zhao, Extend mean curvature flow with finite integral curvature, to appear in *Asian J. Math.*, 2011.

[91] H. W. Xu, F. Ye and E. T. Zhao, The extension for mean curvature flow with finite integral curvature in Riemannian manifolds, to appear in *Sci. China Math.*, 2011.

[92] H. W. Xu and E. T. Zhao, Topological and differentiable sphere theorems for complete submanifolds, *Comm. Anal. Geom.*, **17**(2009), 565-585.

[93] H. W. Xu and E. T. Zhao, Deforming a hypersurface in $\mathbb{R}^{n+1}$ with small total curvature, preprint, 2009.

[94] S. T. Yau, Submanifolds with constant mean curvature, *Amer. J. Math.*, **96**(1974), 346-366.

[95] S. T. Yau, Submanifolds with constant mean curvature II, *Amer. J. Math.*, **97**(1975), 76-100.

[96] S. T. Yau and R. Schoen, Lectures on Differential Geometry, Higher Education Press, Beijing, 2004. (in Chinese)

[97] X. P. Zhu, Lectures on mean curvature flows, Studies in Advanced Mathematics 32, International Press, Somerville, 2002.

在学期间完成的论文

[1] Extend mean curvature flow with finite integral curvature. To appear in *Asian J. Math.* (with H. W. Xu and E. T. Zhao).

[2] The extension for mean curvature flow with finite integral curvature in Riemannian manifolds. To appear in *Sci. China Math.* (with H. W. Xu and E. T. Zhao).

[3] Differential Harnack inequalities for heat equations with potentials under Kähler-Ricci flow. *Acta Math. Sinica (Chin. Ser.)*, **53**(2010), 597-606. (with S. W. Fang).

[4] The extension and convergence of mean curvature flow in higher codimension. arXiv: math.DG/1104.0971 (with K. F. Liu, H. W. Xu and E. T. Zhao).

[5] Differentiable sphere theorems for submanifolds of positive k-th Ricci curvature. Preprint (with H. W. Xu).

简　　历

基本情况

叶斐, 男, 浙江大学数学系在读博士研究生.

教育状况

2002 年 9 月至2006 年 7 月, 华东师范大学数学系, 本科, 专业: 数学与应用数学.

2006 年 9 月至今, 浙江大学数学系, 博士研究生, 专业: 基础数学.

工作经历

无.

研究方向

整体微分几何, 几何分析.

联系方式

通讯地址: 浙江大学数学科学研究中心.

邮编: 310027.

E-mail: yf@cms.zju.edu.cn.

致　　谢

在浙江大学五年的学习生活即将告一段落, 回想五年的时光, 有许多人要感谢, 正是由于他们的支持与鼓励, 才使我在不断的进步与提高中顺利完成学业.

首先我要感谢我的导师许洪伟教授. 五年来, 许老师渊博的知识和严谨的治学态度不断影响着我, 使我在学习专业基础知识的同时, 了解到了学科的前沿和热点问题, 掌握了系统的科研方法, 这篇博士论文正是在他的悉心指导下完成的. 不仅如此, 许老师在工作生活的方方面面给予了我诸多的关怀与指导, 使我在为人处事方面也受益良多. 在此, 向他表示最衷心的感谢.

特别感谢刘克峰教授、郑方阳教授和沈一兵教授对我的关怀和帮助. 感谢浙江大学数学系和数学中心的各位老师. 五年间, 数学中心为我提供了良好的学习环境. 在这里, 我参与了许多学术活动, 获得了与国际顶尖数学家交流探讨的机会, 大大开阔了眼界, 丰富了知识. 数学中心良好的学术氛围使我在与同学的共同学习和讨论中不断进步.

尤其要感谢师兄赵恩涛博士. 我和赵恩涛一起讨论了一系列学术问题, 在我遇到困难的时候他给予了我无私的帮助. 感谢师姐顾娟如在学术上的探讨和帮助.

近两年, 我和赵恩涛协助许老师开设了几何与拓扑方向的讨论班, 许多同学参与其中. 讨论班上报告了几何流与拓扑方面的前沿问题和最新研究成果, 使我得到了很大提高, 在此向参加讨论班的同学一并表示感谢.

还要感谢我的师兄师姐师弟师妹和同学们, 他们是: 田玲、黄飞、杨登允、冷雁、李蕊、陈红冲、杨关祥、李鸽、范伟、严劲文、刘德华、陈逸凡、许智源、雷力、方守文、尹方亮、万建明、朱晓睿、赵亮、朱盛茂、杨飞、赵全庭、翟鹏, 感谢他们与我一起学习和讨论.

最后, 我要感谢我的家人, 特别要感谢我的父母, 他们不断的支持鼓励和无微不至的关心使我克服了种种困难, 顺利走过求学的历程.

叶斐

2011.4.